CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by HAL Clermont Université

La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus

Ludovic Dan Lemle

To cite this version:

Ludovic Dan Lemle. La formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus. Memoire de recherche no.8/2003, l'Institut Girard Desargues, CNRS UMR5028, Lyon. 2003. <hal-00141020>

HAL Id: hal-00141020

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00141020

Submitted on 11 Apr 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

hal-00141020, version 1 - 11 Apr 2007

MÉMOIRE DE RECHERCHE

de Mathématiques Pures

intitulé

"LA FORMULE DE LIE - TROTTER POUR LES SEMI-GROUPES FORTEMENT CONTINUS"

par **Ludovic Dan LEMLE**

sous la direction de **Gilles CASSIER**

SOUTENU À L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

Le 4 juillet 2001

Remerciements.

Tout d'abord, je veux profiter de cette occasion pour présenter mes remerciements à Monsieur **Gilles Cassier** de l'Université Claude Benard Lyon 1 pour le choix du sujet de ce mémoire, ses suggestions et son aide constante. J'ai été très enchanté de cette collaboration avec Monsieur Gilles Cassier.

De même, je veux exprimer ma reconnaissance à Monsieur **Dan Timotin** de l'Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine de Bucharest pour ses excellents conseils pendant son sejour à Lyon.

En même temps, il convient d'exprimer ma gratitude à Monsieur **Dumitru Gaşpar** et à Monsieur **Nicolae Suciu** de l'Université de l'Ouest de Timişoara, qui m'ont donné l'occasion d'étudier dans une très grande université européenne.

Finalement, je veux exprimer toute ma reconnaissance pour l'hospitalité et l'amabilité avec lesquelles j'ai été accueilli par toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de connaître pendant mon stage à l'Université Claude Bernard Lyon 1.

Ludovic Dan LEMLE
Facultatea de Inginerie
Str. Revoluţiei Nr. 5
COD 2750 Hunedoara
ROMÂNIA
tel: +4 02 54 20 75 43
e-mail: lemledan@fih.utt.ro

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préliminaires

Dans la suite, nous noterons par $\mathcal{E}$ un espace de Banach sur le corps des nombres complexes $\mathbf{C}$ et par $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{E}$. Nous désignerons par I l'unité de $B(E)$.
Pour un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ nous noterons par:

$$\mathcal{I}m\ A = \{Ax\,|x \in \mathcal{D}(A)\}$$

l'image de A et par:

$$\mathcal{K}er\ A = \{x \in \mathcal{D}(A)\,|Ax = 0\}$$

le noyau de A.
L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I}m\ A$ est surjectif. Si $\mathcal{K}er\ A = \{0\}$, alors A est injectif. Pour un opérateur bijectif, on peut définir l'opérateur inverse:

$$A^{-1} : \mathcal{D}\left(A^{-1}\right) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

par $A^{-1}y = x$ si $Ax = y$. Evidemment $\mathcal{D}\left(A^{-1}\right) = \mathcal{I}m\ A$. Dans la suite nous noterons par $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. L'ensemble $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ est un ensemble ouvert dans $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ ([**Is'81**, Theorem 4.1.13, pag. 145]).
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous définissons:

$$A^n : \mathcal{D}(A^n) \longrightarrow \mathcal{E}$$

par:

$$A^0 = I\ ,\ A^1 = A\ , ...,\ A^n = A\left(A^{n-1}\right)\quad ,$$

où:

$$\mathcal{D}(A^n) = \left\{ x \in \mathcal{D}(A^{n-1}) \,\middle|\, A^{n-1}x \in \mathcal{D}(A) \right\}$$

quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Lemme 1.1.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathcal{E}$ une fonction continue. Alors:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\, ds = f(a) \quad .$$

Preuve Nous avons:

$$\left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} f(s)\, ds - f(a) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \int_a^{a+t} [f(s) - f(a)]\, ds \right\| \leq \sup_{s\in[a,a+t]} \|f(s) - f(a)\| \quad .$$

L'égalité de l'énoncé résulte de la continuité de l'application f.■

Lemme 1.1.2 *Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $\|A\| < 1$, alors $I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et:*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad .$$

Preuve Soit $Y_n = I + A + A^2 + \ldots + A^n$. Alors:

$$\|Y_{n+p} - Y_n\| \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|} \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Par conséquent, $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite Cauchy. Mais $\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est une algèbre de Banach. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc convergente. Notons $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ sa limite. De l'égalité $(I - A)Y_n = I - A^{n+1}$, il résulte que $\lim_{n\to\infty}(I - A)Y_n = I$, d'où $(I - A)Y = I$.
Nous obtenons $Y(I - A) = I$ de façon analogue.
Finalement, on voit que $I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et que $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$.■

Remarque 1.1.3 Si $\|I - A\| < 1$, alors $A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et $A^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (I - A)^n$.

Définition 1.1.4 *L'ensemble:*

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbf{C} \,\middle|\, (\lambda I - A)^{-1} \textit{ est inversible dans} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \right\}$$

s'appelle l'ensemble résolvant de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Proposition 1.1.5 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $\rho(A)$ est un ensemble ouvert.*

Preuve Définissons l'application:

$$\phi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

par:

$$\phi(\lambda) = \lambda I - A \quad .$$

Evidemment, ϕ est continue. Si $\lambda \in \rho(A)$, alors $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et par suite $\rho(A) = \phi^{-1}\left(\mathcal{GL}(\mathcal{E})\right)$. Comme $\mathcal{GL}(\mathcal{E})$ est un ensemble ouvert, on voit que $\rho(A)$ est ouvert.■

Définition 1.1.6 *L'application:*

$$R(\,.\,; A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

s'appelle la résolvante de A.

Proposition 1.1.7 *La résolvante d'un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, a les propriétés suivantes:*
i) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors:

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A) \quad ;$$

ii) $R(\,.\,; A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$;
iii) si $\lambda \in \mathbf{C}$ et $|\lambda| > \|A\|$, alors $\lambda \in \rho(A)$ et nous avons:

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad ;$$

iv) Nous avons:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1}$$

quels que soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $\lambda \in \rho(A)$.

Preuve i) Nous avons successivement:

$$\begin{aligned} & R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} = \\ = \; & (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A - \lambda I + A) (\mu I - A)^{-1} = \\ = \; & (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A) \end{aligned}$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \rho(A)$.
ii) Soit $\lambda_0 \in \rho(A)$. Notons $D\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|}\right)$ le disque ouvert de centre λ_0 et de rayon $\frac{1}{\|R(\lambda;A)\|}$. Alors, pour $\lambda \in D\left(\lambda_0; \frac{1}{\|R(\lambda_0;A)\|}\right)$, nous avons:

$$\lambda I - A = [I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]\,(\lambda_0 I - A) \quad .$$

Mais:

$$\|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)\| = |\lambda_0 - \lambda|\|R(\lambda_0; A)\| < 1 \quad .$$

Compte tenu du lemme 1.1.2, il résulte que:

$$I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A) \in \mathcal{GL}(\mathcal{E}) \quad ,$$

d'où $\lambda I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et:

$$\begin{aligned}
(\lambda I - A)^{-1} &= (\lambda_0 I - A)^{-1}[I - (\lambda_0 - \lambda)R(\lambda_0; A)]^{-1} = \\
&= R(\lambda_0; A)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; A)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0; A)^{n+1} \quad .
\end{aligned}$$

Donc $R(\,.\,; A)$ est analytique sur $\rho(A)$.
iii) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| > \|A\|$. Alors $\|\lambda^{-1}A\| < 1$, d'où $I - \lambda^{-1}A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$. De plus:

$$\left(I - \lambda^{-1}A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda^{-1}A\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^n} \quad .$$

Par conséquent:

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1}\left(I - \lambda^{-1}A\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad .$$

L'assertion (iv) s'obtient par récurrence. Pour $n = 1$, nous avons:

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda; A) = \frac{d}{d\lambda}(\lambda I - A)^{-1} = -(\lambda I - A)^{-2} = R(\lambda; A)^2 \quad .$$

Supposons que pour $k \in \mathbf{N}$, on ait:

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda; A) = (-1)^k k!\,R(\lambda; A)^{k+1} \quad .$$

Montrons que:

$$\frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda; A) = (-1)^{k+1}(k+1)!\,R(\lambda; A)^{k+2} \quad .$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} & \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda; A) = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda; A)\right) = \\ = \; & \frac{d}{d\lambda}\left[(-1)^k k!(\lambda I - A)^{-k-1}\right] = \\ = \; & (-1)^k k!(-k-1)(\lambda I - A)^{-k-2} = (-1)^{k+1}(k+1)! R(\lambda; A)^{k+2} \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda; A) = (-1)^n n! R(\lambda; A)^{n+1} \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*. \blacksquare$$

Remarque 1.1.8 Compte tenu de la proposition 1.1.7 (iii), il résulte que:

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, |\lambda| > \|A\|\} \subset \rho(A).$$

Définition 1.1.9 *L'ensemble $\sigma(A) = \mathbf{C} - \rho(A)$ s'appelle le spectre de $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.*

Proposition 1.1.10 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors:*
i) $\sigma(A) \neq \emptyset$;
ii) $\sigma(A)$ est un ensemble compact.

Preuve i) Supposons que $\sigma(A) = \emptyset$. Alors $\rho(A) = \mathbf{C}$. Par conséquent, l'application $\lambda \longmapsto (\lambda I - A)^{-1}$ est définie sur $\mathbf{C}$. De plus, pour $|\lambda| > \|A\|$, nous avons:

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \rho(A).$$

Il s'ensuit que:

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} R(\lambda; A) = 0.$$

Donc il existe $M > 0$ tel que $\|R(\lambda; A)\| < M$, $(\forall)\lambda \in \mathbf{C}$. Le théorème de Liouville ([**DS'67**, pag. 231]) implique que $R(.; A)$ est constante sur $\mathbf{C}$ et que cette constante ne peut être que 0. Donc $(\lambda I - A)^{-1} = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, ce qui est absurde. Par conséquent $\sigma(A) \neq \emptyset$.
ii) Compte tenu de la proposition 1.1.7 (iii), nous obtenons que:

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

L'ensemble $\sigma(A)$ est donc borné. Comme nous avons vu que $\sigma(A)$ est un ensemble fermé, il est donc compact.$\blacksquare$

Définition 1.1.11 *Pour un opérateur linéaire $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, le nombre*

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

s'appelle le rayon spectral de A.

Remarque 1.1.12 Evidemment, pour un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $\sigma(A)$ est contenu dans l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $r(A)$. De plus, on peut montrer que

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

et on voit que $r(A) \leq \|A\|$.

Par la suite, nous présenterons quelques problèmes concernant la théorie spectrale pour un opérateur linéaire fermé $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$.

Définition 1.1.13 *L'ensemble:*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{E} \text{ est opérateur bijectif}\}$$

s'appele l'ensemble résolvant de A.

Remarque 1.1.14 Il résulte du théorème du graphe fermé ([**DS'67**, Theorem II.2.4, pag. 57]) que l'opérateur:

$$(\lambda I - A)^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est continu dans $\mathcal{E}$.

Définition 1.1.15 *L'application:*

$$R(\,.\,; A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \rho(A)$$

s'appelle la résolvante de A.

Proposition 1.1.16 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$, un opérateur linéaire fermé. Alors:*
i) $\rho(A)$ est un ensemble ouvert et $R(\,.\,; A)$ est une application analytique sur $\rho(A)$;
ii) si $\lambda, \mu \in \rho(A)$, alors:

$$R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A) \quad ;$$

iii) Nous avons:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A) = (-1)^n n! R(\lambda;A)^{n+1}$$

quels que soient $n \in \mathbf{N}$ *et* $\lambda \in \rho(A)$.

Preuve Elle est analogue à celle de la proposition 1.1.7.■

Définition 1.1.17 *L'ensemble* $\sigma(A) = \mathbf{C} - \rho(A)$ *s'appelle le spectre de* A.

Remarque 1.1.18 $\sigma(A)$ est un ensemble fermé.

Remarque 1.1.19 Il existe des opérateurs fermés qui ont un spectre non borné.

Exemple 1.1.20 Prenons $\mathcal{E} = \mathcal{C}_{[0,1]}$ et considérons l'opérateur:

$$D : \mathcal{C}^1_{[0,1]} \longrightarrow \mathcal{E}$$

défini par:

$$Df = f^{'}$$

Dans ce cas, nous avons $\sigma(D) = \mathbf{C}$.

Définition 1.1.21 *Soit* $\mathbf{D} \subset \mathbf{C}$ *un ensemble ouvert. Une application analytique:*

$$\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

qui vérifie la propriété:

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu \quad , \quad (\forall)\lambda, \mu \in \mathbf{D},$$

s'appelle une pseudo-résolvante.

Théorème 1.1.22 *Soit* $\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une pseudo-résolvante. Alors:*
i) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$, $(\forall)\lambda, \mu \in \mathbf{D}$;
ii) $\mathcal{K}er R_\lambda$ *et* $\mathcal{I}m R_\lambda$ *ne dépendent pas de* $\lambda \in \mathbf{D}$;
iii) R_λ *est la résolvante d'un opérateur linéaire* A *fermé et défini sur un sous espace dense si et seulement si* $\mathcal{K}er R_\lambda = \{0\}$ *et* $\overline{\mathcal{I}m R_\lambda} = \mathcal{E}$.

Preuve i) Soient $\lambda, \mu \in \mathbf{D}$. Alors, nous avons:

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu$$

et:

$$R_\mu - R_\lambda = (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda \quad ,$$

d'où:

$$0 = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu + (\lambda - \mu) R_\mu R_\lambda \quad .$$

Par suite, on a $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.
ii) Soient $\mu \in \mathbf{D}$ et $x \in \mathcal{K}er\ R_\mu$. Alors $R_\mu x = 0$. Si $\lambda \in \mathbf{D}$, on a:

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu x \quad .$$

Donc $R_\lambda x = 0$. Par conséquent $x \in \mathcal{K}er\ R_\lambda$. Il s'ensuit que $\mathcal{K}er\ R_\lambda$ ne dépend pas de $\lambda \in \mathbf{D}$.
Soient $\mu \in \mathbf{D}$ et $y \in \mathcal{I}m\ R_\mu$. Alors il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que $R_\mu x = y$. Si $\lambda \in \mathbf{D}$, nous avons:

$$R_\lambda x - R_\mu x = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu x \quad .$$

Donc:

$$R_\lambda x - y = (\mu - \lambda) R_\lambda y \quad ,$$

ou bien:

$$y = R_\lambda \left(x + (\lambda - \mu) y \right) \quad .$$

Donc il existe $u = x + (\lambda - \mu) y \in \mathcal{E}$ tel que $y = R_\lambda u$. Par conséquent $y \in \mathcal{I}m\ R_\lambda$. Il s'ensuit que $\mathcal{I}m\ R_\lambda$ ne dépend pas de $\lambda \in \mathbf{D}$.
iii) $\Longrightarrow$ Si R_λ est une résolvante pour un opérateur linéaire A fermé et défini sur un sous espace dense, alors R_λ est une application bijective, d'où $\mathcal{K}er\ R_\lambda = \{0\}$ et $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$. Par suite, ${R_\lambda}^{-1} = \lambda I - A$ et $\overline{\mathcal{D}\left({R_\lambda}^{-1}\right)} = \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$. Par conséquent $\overline{\mathcal{I}m\ R_\lambda} = \overline{\mathcal{D}\left({R_\lambda}^{-1}\right)} = \mathcal{E}$.
$\Longleftarrow$ Soient $\mathbf{D} \ni \lambda \longmapsto R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une pseudo-résolvante et $\lambda \in \mathbf{D}$ tel que $\mathcal{K}er\ R_\lambda = \{0\}$. Alors pour $y \in \mathcal{I}m\ R_\lambda$, il existe un seul $x_\lambda \in \mathcal{E}$ tel que $y = R_\lambda x_\lambda$. Mais pour $\lambda, \mu \in \mathbf{D}$, on a:

$$R_\lambda y - R_\mu y = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu y \quad .$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} R_\lambda y - R_\mu y &= R_\lambda R_\mu x_\mu - R_\mu R_\lambda x_\lambda = \\ &= R_\lambda R_\mu x_\mu - R_\lambda R_\mu x_\lambda = R_\lambda R_\mu \left(x_\mu - x_\lambda \right) \quad . \end{aligned}$$

Donc $x_\mu - x_\lambda = (\mu - \lambda)y$, d'où $\lambda y - x_\lambda = \mu y - x_\mu$. Par conséquent, l'opérateur:

$$A : \mathcal{I}m\ R_\lambda \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$Ay = \lambda y - x_\lambda = \lambda y - {R_\lambda}^{-1} y$$

est correctement défini (valeur indépendante de λ). De même $\overline{\mathcal{D}(A)} = \overline{\mathcal{I}m\ R_\lambda} = \mathcal{E}$. Puis que $R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il résulte du théorème du graphe fermé ([**DS'67**, Theorem II.2.4, pag. 57]) que R_λ^{-1} est un opérateur fermé. Donc $A = \lambda I - {R_\lambda}^{-1}$ est un opérateur fermé. De plus, on a:

$${R_\lambda}^{-1} y = x_\lambda = \lambda y - Ay = (\lambda I - A)y \quad .$$

Par conséquent $R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$ est la résolvante de A.■

1.2 Les opérateurs dissipatifs

Dans la suite, nous notons par $\mathcal{E}^*$ l'espace dual du $\mathcal{E}$ et par $\| \, . \, \|_*$ sa norme. Pour tout $x \in \mathcal{E}$, nous désignerons par $\mathcal{J}(x)$ l'ensemble:

$$\left\{ x^* \in \mathcal{E}^* \,\middle|\, \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|_*^2 \right\} \quad .$$

Définition 1.2.1 *On dit que l'opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est dissipatif si pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, il existe $x^* \in \mathcal{J}(x)$ tel que $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$.*

Dans la proposition suivante nous présentons une caractérisation très utile pour les opérateurs dissipatifs.

Proposition 1.2.2 *Un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est dissipatif si et seulement si pour tout $\alpha > 0$ on a:*

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha \|x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Preuve $\Longrightarrow$ Supposons que $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est un opérateur dissipatif. Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, il existe $x^* \in \mathcal{J}(x)$ tel que $Re\langle Ax, x^* \rangle \leq 0$. Si $\alpha > 0$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} & \|(\alpha I - A)x\|\,\|x\| = \|(\alpha I - A)x\|\,\|x^*\|_* \geq \\ \geq\ & |\langle(\alpha I - A)x, x^*\rangle| \geq Re\langle(\alpha I - A)x, x^*\rangle = \\ =\ & Re\langle\alpha x, x^*\rangle - Re\langle Ax, x^*\rangle \geq \alpha\|x\|^2 \quad , \end{aligned}$$

d'où il résulte l'inégalité de l'énoncé.

$\Longleftarrow$ Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ tel que pour tout $\alpha > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$ on ait:

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha\|x\| \quad .$$

Soit $y^*_\alpha \in \mathcal{J}\left((\alpha I - A)x\right)$. On a donc:

$$\langle(\alpha I - A)x, y^*_\alpha\rangle = \|(\alpha I - A)x\|^2 = \|y^*_\alpha\|^2_* \quad ,$$

d'où:

$$\|y^*_\alpha\|_* = \|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha\|x\| \quad .$$

Nous définissons:

$$z^*_\alpha = \frac{y^*_\alpha}{\|y^*_\alpha\|_*}$$

et désignons par $\mathcal{B}_1(\mathcal{E}^*)$ la boule unité de $\mathcal{E}^*$ et par $\partial\mathcal{B}_1(\mathcal{E}^*)$ sa frontière. Il est évident que $z^*_\alpha \in \partial\mathcal{B}_1(\mathcal{E}^*)$. De plus:

$$\begin{aligned} \alpha\|x\| &\leq \|(\alpha I - A)x\| = \frac{1}{\|y^*_\alpha\|_*}\langle(\alpha I - A)x, y^*_\alpha\rangle = \\ &= \langle(\alpha I - A)x, z^*_\alpha\rangle \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} & \alpha\|x\| \leq Re\langle(\alpha I - A)x, z^*_\alpha\rangle = Re\langle\alpha x, z^*_\alpha\rangle - Re\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \leq \\ \leq\ & \alpha\,|\langle x, z^*_\alpha\rangle| - Re\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \leq \alpha\|x\|\,\|z^*_\alpha\|_* - Re\langle Ax, z^*_\alpha\rangle = \\ =\ & \alpha\|x\| - Re\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que:

$$Re\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \leq 0 \quad ,$$

d'où:

$$-Re\langle Ax, z^*_\alpha\rangle \leq |\langle Ax, z^*_\alpha\rangle| \leq \|Ax\|\,\|z^*_\alpha\|_* = \|Ax\|$$

et par conséquent:

$$\alpha\|x\| \leq \alpha Re\langle x, z^*_\alpha\rangle + \|Ax\| \quad .$$

Donc:

$$Re\langle x, z_\alpha^*\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\alpha}\|Ax\| \quad .$$

D'autre part, en appliquant le théorème d'Alaoglu ([**DS'67**, Theorem V.4.2, pag. 424]), on voit que la boule unité $\mathcal{B}_1(\mathcal{E}^*)$ est faiblement compacte. Par conséquent, il existe une sous suite $\left(z_\beta^*\right)_{\beta>0} \subset (z_\alpha^*)_{\alpha>0}$ et il existe $z^* \in \mathcal{B}_1(\mathcal{E}^*)$ tel que:

$$z_\beta^* \longrightarrow z^* \quad \text{si} \quad \beta \to \infty$$

pour la topologie faible. Comme on a

$$Re\langle Ax, z_\beta^*\rangle \leq 0$$

et

$$Re\langle x, z_\beta^*\rangle \geq \|x\| - \frac{1}{\beta}\|Ax\| \quad ,$$

on obtient par passage à limite en $\beta \to \infty$:

$$Re\langle Ax, z^*\rangle \leq 0$$

et:

$$Re\langle x, z^*\rangle \geq \|x\| \quad .$$

Mais comme:

$$Re\langle x, z^*\rangle \leq |\langle x, z^*\rangle| \leq \|x\|\|z^*\|_* \leq \|x\| \quad ,$$

il s'ensuit que:

$$\langle x, z^*\rangle = \|x\| \quad .$$

Si nous prenons $x^* = \|x\|z^*$, il vient:

$$\langle x, x^*\rangle = \langle x, \|x\|z^*\rangle = \|x\|\langle x, z^*\rangle = \|x\|^2 \quad .$$

Il en résulte que $x^* \in \mathcal{J}(x)$. Finalement, on voit que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$, d'où l'on tire que l'opérateur A est dissipatif.■

Proposition 1.2.3 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur dissipatif. S'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\mathcal{I}m\ (\alpha_0 I - A) = \mathcal{E}$, alors pour tout $\alpha > 0$ on a $\mathcal{I}m\ (\alpha I - A) = \mathcal{E}$.*

Preuve Soient $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur dissipatif et $\alpha_0 > 0$ tel que $\mathcal{I}m\ (\alpha_0 I - A) = \mathcal{E}$. Compte tenu de la proposition 1.2.2, on voit que:

$$\|(\alpha_0 I - A)x\| \geq \alpha_0\|x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A)$$

et comme $\mathcal{I}m\ (\alpha_0 I - A) = \mathcal{E}$, il en résulte que $\alpha_0 I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$ et α_0 appartient donc bien à $\rho(A)$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \longrightarrow y$ si $n \to \infty$. Il est clair que:

$$(\alpha_0 I - A)x_n \longrightarrow \alpha_0 x - y \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

et par conséquent:

$$x_n = R(\alpha_0; A)(\alpha_0 I - A)x_n \longrightarrow R(\alpha_0; A)(\alpha_0 x - y) \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Par suite, nous obtenons:

$$R(\alpha_0; A)(\alpha_0 x - y) = x \quad .$$

Comme $\mathcal{I}m\ R(\alpha_0; A) \subset \mathcal{D}(A)$, on voit que $x \in \mathcal{D}(A)$. De plus:

$$(\alpha_0 I - A)x = \alpha_0 x - y \quad ,$$

d'où il résulte que $Ax = y$. Par conséquent, A est un opérateur fermé.
Nous désignerons par $\mathcal{A}$ l'ensemble:

$$\{\alpha \in]0, \infty) \,|\mathcal{I}m(\alpha I - A) = \mathcal{E}\} \quad .$$

Soit $\alpha \in \mathcal{A}$. Comme A est un opérateur dissipatif, on voit que:

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha \|x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où il résulte que $\alpha \in \rho(A)$. Puisque $\rho(A)$ est un ensemble ouvert, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de α contenu dans $\rho(A)$. Comme $\mathcal{V} \cap]0, \infty) \subset \mathcal{A}$, on voit que $\mathcal{A}$ est un ensemble ouvert.
Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$ tel que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ si $n \to \infty$. Comme $\mathcal{I}m\ (\alpha_n I - A) = \mathcal{E}$, $(\forall) n \in \mathbf{N}$, on observe que pour tout $y \in \mathcal{E}$, il existe $x_n \in \mathcal{D}(A)$ tel que:

$$(\alpha_n I - A)x_n = y \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N},$$

et par suite, il existe $C > 0$ tel que:

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{\alpha_n}\|y\| \leq C \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
&\alpha_n \|x_n - x_m\| \leq \|(\alpha_m I - A)(x_n - x_m)\| = \\
= \ & \|(\alpha_m I - A)x_n - (\alpha_m I - A)x_m\| = \|\alpha_m x_n - Ax_n - y\| = \\
= \ & \|\alpha_m x_n - \alpha_n x_n + \alpha_n x_n - Ax_n - y\| = \\
= \ & \|(\alpha_m - \alpha_n)x_n + y - y\| = |\alpha_m - \alpha_n| \|x_n\| \leq C|\alpha_m - \alpha_n| \quad ,
\end{aligned}$$

d'où il résulte que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy. Puisque $\mathcal{E}$ est un espace de Banach, il s'ensuit que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point $x \in \mathcal{E}$. Alors, on en déduit que:

$$Ax_n \longrightarrow \alpha x - y \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

et comme A est un opérateur fermé, on obtient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\alpha x - Ax = y$. Par suite, $\mathcal{I}m\ (\alpha I - A) = \mathcal{E}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est fermé dans $]0,\infty)$ et comme il existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, nous déduisons que $\mathcal{A} =]0,\infty)$.■

1.3 Semi-groupes uniformément continus

Dans la suite nous présenterons quelques problèmes concernant les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach $\mathcal{E}$.

Définition 1.3.1 *On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes:*
i) $T(0) = I$;
ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad (\forall)t, s \geq 0$;
iii) $\lim_{t\searrow 0} \|T(t) - I\| = 0$.

Définition 1.3.2 *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire:*

$$A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad ,$$

$$A = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} \quad .$$

Lemme 1.3.3 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ dont le générateur infinitésimal est A.*

Preuve Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ une application définie par:

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \quad .$$

La série du membre de droite de l'égalité est convergente pour la topologie de la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$. De plus, il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s)$ quels que soient $t, s \geq 0$.
Compte tenu de l'inégalité:

$$\|T(t) - I\| \leq e^{t\|A\|} - 1 \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

il résulte:

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0 \quad .$$

Donc la famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est un semi-groupe uniformément continu.
D'autre part, puisque:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{T(t) - I}{t} - A \right\| = \left\| \frac{1}{t} \left(e^{tA} - I - tA \right) \right\| = \left\| \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| = \\
= \;& \left\| \frac{1}{t} \left(I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} - I - tA \right) \right\| \leq \frac{1}{t} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} = \\
= \;& \frac{1}{t} \left(1 + t\|A\| + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} - 1 - t\|A\| \right) = \frac{1}{t} \left(e^{t\|A\|} - 1 - t\|A\| \right) = \\
= \;& \frac{e^{t\|A\|} - 1}{t\|A\|} \|A\| - \|A\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \searrow 0,
\end{aligned}$$

nous obtenons:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A \quad .$$

Le semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ admet donc pour générateur infinitésimal l'opérateur A.■

Lemme 1.3.4 *Etant donné un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il existe un unique semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ tel que:*

$$T(t) = e^{tA} \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un autre semi-groupe uniformément continu engendré par A, nous avons:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{T(t) - I}{t} = A$$

et:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{S(t) - I}{t} = A \quad .$$

Par conséquent:

$$\lim_{t\searrow 0}\left\|\frac{T(t)-S(t)}{t}\right\| = 0 \quad .$$

Pour $a \in]0,\infty)$, nous considérons l'intervalle $I_a = [0,a[$. Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sont des semi-groupes uniformément continus, nous voyons que les applications:

$$t \longmapsto \|T(t)\|$$

et:

$$t \longmapsto \|S(t)\|$$

sont continues. Il existe $c_a \in [1,\infty)$ tel que:

$$\sup_{t\in I_a}\{\|T(t)\|, \|S(t)\|\} \leq c_a \quad .$$

Si $\varepsilon > 0$, il existe $t_0 \in I_a$, $t_0 > 0$, tel que:

$$\left\|\frac{T(t)-S(t)}{t}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \quad , \quad (\forall)t \in]0,t_0[.$$

Soit $t \in I_a$ arbitrairement fixé et $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{t}{n} \in]0,t_0[$. Alors:

$$\begin{aligned}
& T(t)-S(t) = \left[T\left(n\frac{t}{n}\right)\right] - \left[S\left(n\frac{t}{n}\right)\right] = \\
= \; & T\left(n\frac{t}{n}\right)S\left(0\frac{t}{n}\right) - T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right) + \\
+ \; & T\left((n-1)\frac{t}{n}\right)S\left(1\frac{t}{n}\right) - T\left((n-2)\frac{t}{n}\right)S\left(2\frac{t}{n}\right) + \\
+ \; & T\left((n-2)\frac{t}{n}\right)S\left(2\frac{t}{n}\right) - \cdots - T\left(0\frac{t}{n}\right)S\left(n\frac{t}{n}\right) = \\
= \; & \sum_{k=0}^{n-1}\left[T\left((n-k)\frac{t}{n}\right)S\left(k\frac{t}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)S\left((k+1)\frac{t}{n}\right)\right] = \\
= \; & \sum_{k=0}^{n-1}T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\left[T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right]S\left(k\frac{t}{n}\right)
\end{aligned}$$

quel que soit $t \in I_a$.

De l'inégalité:

$$\left\|\frac{T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)}{\frac{t}{n}}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \quad ,$$

nous obtenons:

$$\left\|T\left(\frac{t}{n}\right)-S\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{ac_a^2}\frac{t}{n}$$

et par suite:

$$\|T(t) - S(t)\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} c_a \frac{\varepsilon}{ac_a^2} \frac{t}{n} c_a < \varepsilon \quad , \quad (\forall) t \in I_a.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte que $T(t) = S(t)$, pour tout $t \in I_a$. Mais, comme $a \in]0, \infty)$ est aussi arbitraire, il s'ensuit que $T(t) = S(t)$, $(\forall) t \in [0, \infty)$.■

Présentons maintenant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 1.3.5 *Un opérateur $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est un opérateur linéaire borné.*

Preuve $\Longrightarrow$ Soit $A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors:

$$\lim_{t \searrow 0} \|T(t) - I\| = 0 \quad .$$

L'application $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est continue et par suite $\int_0^t T(s)\, ds \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Avec le lemme 1.1.1, on voit que:

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)\, ds = T(0) = I \quad .$$

Il existe donc $\tau > 0$ tel que:

$$\left\| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t)\, dt - I \right\| < 1 \quad .$$

Compte tenu de la remarque 1.1.3, l'élément $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau T(t) dt$ est inversible, d'où il s'ensuit que $\int_0^\tau T(t)\, dt$ est inversible. Nous avons:

$$\frac{T(h) - I}{h} \int_0^\tau T(t)\, dt = \frac{1}{h} \left[\int_0^\tau T(t+h)\, dt - \int_0^\tau T(t)\, dt \right] =$$

$$= \frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} T(u)\, du - \frac{1}{h} \int_0^h T(u)\, du \quad .$$

Avec le lemme 1.1.1, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^{\tau}T(t)\,dt = \\
&= \lim_{h\searrow 0}\left[\frac{1}{h}\int_{\tau}^{\tau+h}T(u)\,du-\frac{1}{h}\int_{0}^{0+h}T(u)\,du\right]= \\
&= T(\tau)-T(0)=T(\tau)-I \quad ,
\end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)-I}{h}=[T(\tau)-I]\left[\int_0^{\tau}T(t)\,dt\right]^{-1}.$$

Par conséquent, le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continue $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'opérateur:

$$A=[T(\tau)-I]\left[\int_0^{\tau}T(t)\,dt\right]^{-1}\in\mathcal{B}(\mathcal{E}) \quad .$$

$\Longleftarrow$ Cette implication est évidente compte tenu du lemme 1.3.3 et du lemme 1.3.4.■

Corollaire 1.3.6 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Alors:*
i) il existe $\omega\geq 0$ tel que $\|T(t)\|\leq e^{\omega t}$, $(\forall)t\geq 0$;
ii) l'application $[0,\infty)\ni t\longmapsto T(t)\in\mathcal{B}(\mathcal{E})$ est différentiable pour la topologie de la norme et:

$$\frac{dT(t)}{dt}=AT(t)=T(t)A \quad , \quad (\forall)t\geq 0.$$

Preuve i) Nous avons:

$$\|T(t)\|=\left\|e^{tA}\right\|\leq e^{t\|A\|} \quad , \quad (\forall)t\geq 0.$$

Pour $\omega=\|A\|$, nous obtenons l'inégalité:

$$\|T(t)\|\leq e^{\omega t} \quad , \quad (\forall)t\geq 0.$$

L'assertion (ii) provient des égalités suivantes:

$$A=\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)-I}{t}=\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)-T(0)}{t-0} \quad ,$$

nous en déduisons que l'application considérée est dérivable au point $t = 0$.

Soient $t > 0$ et $h > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \leq \\ \leq \; &\left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| \|T(t)\| \leq \left\| \frac{T(h) - I}{h} - A \right\| e^{t\|A\|} \quad , \end{aligned}$$

d'où:

$$\lim_{h \searrow 0} \left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| = 0 \quad .$$

Par conséquent, l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à droite et on a:

$$\frac{d^+T(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Soient $t > 0$ et $h < 0$ tel que $t + h > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{T(t+h) - T(t)}{h} - AT(t) \right\| \leq \\ \leq \; &\left\| \frac{I - T(-h)}{h} - AT(-h) \right\| \|T(t+h)\| \leq \\ \leq \; &\left\| \frac{T(-h) - I}{-h} - AT(-h) \right\| e^{(t+h)\|A\|} \quad , \end{aligned}$$

d'où il vient:

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = AT(t) \quad .$$

Par conséquent l'application considérée dans l'énoncé est dérivable à gauche et nous avons:

$$\frac{d^-T(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Finalement on voit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0, \infty)$ et nous avons:

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

On vérifie que $AT(t) = T(t)A$, $(\forall) t \geq 0$.■

Maintenant abordons quelques problèmes de théorie spectrale pour un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ ayant pour le générateur infinitésimal l'opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.

Théorème 1.3.7 *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un semi-groupe uniformément continu et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $Re\lambda > \|A\|$, alors l'application:*

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad ,$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt$$

définit un opérateur linéaire borné, $\lambda \in \rho(A)$ *et* $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$ *, pour tout* $x \in \mathcal{E}$*.*

Preuve Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $Re\lambda > \|A\|$. Avec le corollaire 1.3.6 (i), on voit que:

$$\|T(t)\| \leq e^{\|A\|t} \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

De même, nous avons:

$$\left\| e^{-\lambda t} T(t)x \right\| \leq e^{-(Re\lambda - \|A\|)t} \|x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

et:

$$\int_0^\infty e^{-(Re\lambda - \|A\|)t}\, dt = \frac{1}{Re\lambda - \|A\|} \quad .$$

L'application R_λ est donc bornée et il est clair que R_λ est linéaire.
Pour $x \in \mathcal{E}$, nous avons:

$$\begin{aligned} R_\lambda A x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) A x\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} T(t) x\, dt = \\ &= -x + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x\, dt = -x + \lambda R_\lambda x \quad , \end{aligned}$$

d'où $x = R_\lambda(\lambda I - A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Par conséquent $R_\lambda(\lambda I - A) = I$.
De même, nous avons:

$$\begin{aligned} A R_\lambda x &= A \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A T(t) x\, dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) A x\, dt = R_\lambda A x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Par suite, on a $AR_\lambda x = R_\lambda A x = -x + \lambda R_\lambda x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Il en résulte que $(\lambda I - A)R_\lambda = I$.
Par conséquent $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda = R(\lambda; A)$.■

Définition 1.3.8 *L'opérateur* $R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ *défini par:*

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x\, dt \quad , \quad \lambda \in \mathbf{C} \text{ avec } Re\lambda > \|A\|,$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur* A*.*

Remarque 1.3.9 On a:

$$\{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, Re\lambda > \|A\|\,\} \subset \rho(A)$$

et:

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, Re\lambda \leq \|A\|\,\} \ .$$

De même, nous obtenons:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda - \|A\|}$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $Re\lambda > \|A\|$.

Pour obtenir des représentations de type Riesz-Dunford et de type Bromwich, on a besoin d'une classe spéciale de contours de Jordan.

Définition 1.3.10 *Un contour de Jordan lisse et fermé qui entoure $\sigma(A)$, s'appelle un contour de Jordan A-spectral s'il est homotope avec un cercle C_r de centre O et de rayon $r > \|A\|$.*

Théorème 1.3.11 (Riesz-Dunford) *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si Γ_A est un contour de Jordan A-spectral, alors nous avons:*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda; A)\, d\lambda \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve Soit Γ_A un contour de Jordan A-spectral. Alors Γ_A est homotope avec un cercle C_r de centre O et de rayon $r > \|A\|$. Par conséquent, on a:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda; A)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda; A)\, d\lambda \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Compt tenu de la proposition 1.1.7 (iii), on voit que:

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \quad ,$$

uniformément par rapport à λ sur les sous-ensembles compacts de $\{\lambda \in \mathbf{C} |\ |\lambda| > \|A\|\}$, particulièrement sur le cercle C_r. On a:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} e^{\lambda t} R(\lambda; A)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} e^{\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}}\, d\lambda A^n \quad .$$

Appliquons la formule de Cauchy ([**DS'67**, pag. 228]) avec la fonction $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, nous obtenons:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda = \frac{t^n}{n!} \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N} \quad .$$

Par conséquent:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_A} e^{\lambda t} R(\lambda; A)\,d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = e^{tA} = T(t) \quad , \quad (\forall) t \geq 0. \blacksquare$$

Théorème 1.3.12 (Bromwich) *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi-groupe uniformément continu et* A *son générateur infinitésimal. Si* $a > \|A\|$*, alors nous avons:*

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt} R(z; A)\,dz$$

et l'intégrale est uniformément convergente par rapport à t *sur les intervalles compacts de* $]0, \infty)$.

Preuve Soit $a > \|A\|$, pour $R > 2a$ nous considérons le contour de Jordan lisse et fermé

$$\Gamma_R = \Gamma_R^{'} \cup \Gamma_R^{"}$$

où

$$\Gamma_R^{'} = \{a + i\tau | \tau \in [-R, R]\}$$

et

$$\Gamma_R^{"} = \left\{ a + R(\cos\varphi + i \sin\varphi) \middle| \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right\} \quad .$$

Remarquons que pour $z \in \Gamma_R^{'}$ on a:

$$|z| = |a + i\tau| > a > \|A\| \quad .$$

De même, si $z \in \Gamma_R^{"}$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} |z| &= |a + (\cos\varphi + i\sin\varphi)| = |a - [-R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]| \geq \\ &\geq ||a| - | - R(\cos\varphi + i\sin\varphi)|| = |a - R| = R - a > \|A\| \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent, $z \in \Gamma_R$ implique $z \in \rho(A)$. De plus, on voit que Γ_R est homotope au cercle C de centre O et de rayon $R - a$. Il s'ensuit donc que Γ_R est un contour de Jordan A-spectral et avec le théorème de Riesz-Dunford nous obtenons:

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} e^{zt} R(z; A)\,dz \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

pour tout $R > 2a$. Il en résulte:

$$T(t) = I_t^{'}(R) + I_t^{"}(R) \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

pour tout $R > 2a$, où nous avons noté

$$I_t^{'}(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{'}} e^{zt} R(z; A)\, dz$$

et

$$I_t^{"}(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{"}} e^{zt} R(z; A)\, dz \quad .$$

Montrons que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{"}} e^{zt} R(z; A)\, dz = 0 \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Compte tenu de la proposition 1.1.7 (iii), on voit que:

$$R(z; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{z^{n+1}} \quad ,$$

la série de la partie droite de l'égalité étant uniformément convergente par rapport à z sur les sous-ensembles compacts de $\{z \in \mathbf{C} |\, |z| > \|A\|\}$, particulièrement sur $\Gamma_R^{"}$. Il s'ensuit que:

$$I^{"}(R) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{"}} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}} A^n\, dz \right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{"}} \frac{e^{zt}}{z}\, dz \right) I + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{"}} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\, dz \right) A^n \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

pour tout $R > 2a$. Notons

$$A_t(R) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{"}} \frac{e^{zt}}{z}\, dz \right) I$$

et

$$B_t(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^{"}} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\, dz \right) A^n \quad .$$

Pour l'intégrale $A_t(R)$, avec la paramétrisation suivante

$$z = a + R(\cos\varphi + i \sin\varphi) \quad , \quad \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right],$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
A_t(R) &= \left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{e^{t(a+R\cos\varphi+i\sin\varphi)}}{z} R(-\sin\varphi+i\cos\varphi)\,d\varphi\right] I = \\
&= \left[\frac{R}{2\pi}e^{ta}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR\cos\varphi}e^{itR\sin\varphi}\frac{1}{z}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,d\varphi\right] I \quad .
\end{aligned}$$

Il en résulte que:

$$\begin{aligned}
\|A_t(R)\| &\leq \frac{R}{2\pi}e^{ta}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|e^{tR\cos\varphi}\right| \left|e^{itR\sin\varphi}\right| \frac{1}{|z|}|\cos\varphi+i\sin\varphi|\,d\varphi \leq \\
&\leq \frac{R}{2\pi}e^{ta}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR\cos\varphi}\frac{1}{R-a}\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{R}{R-a}e^{ta}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR\cos\varphi}\,d\varphi
\end{aligned}$$

parce que $z \in \Gamma''_R$ implique

$$|z| = |a + R(\cos\varphi + i\sin\varphi)| > R - a$$

donc

$$\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R-a} \quad .$$

De l'inégalité $R > 2a$, on obtient $2R - 2a > R$, d'où

$$\frac{R}{R-a} < 2 \quad .$$

Par conséquent:

$$\|A_t(R)\| \leq \frac{1}{\pi}e^{ta}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR\cos\varphi}\,d\varphi \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

pour tout $R > 2a$. Soient $0 \leq t_1 < t_2$ et $t \in [t_1, t_2]$. Pour tout $R > 2a$ et tout $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ on a

$$e^{tR\cos\varphi} \leq 1 \quad .$$

Comme

$$\lim_{R\to\infty} e^{tR\cos\varphi} = 0 \quad ,$$

avec le théorème de la convergence bornée de Lebesgue il résulte que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR\cos\varphi}\, d\varphi = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{R\to\infty} A_t(R) = 0$$

uniformément par rapport à $t \in [t_1, t_2]$.

Soit maintenant l'intégrale

$$B_t(R) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''_R} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\, dz \right) A^n \quad .$$

Pour tout $t \in [t_1, t_2]$ et tout $R > 2a$ on a:

$$e^{tR\cos\varphi} \leq 1 \quad , \quad (\forall)\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \quad .$$

On voit que:

$$\left| \int_{\Gamma''_R} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\, dz \right| \leq \frac{Re^{ta}}{(R-a)^{n+1}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{tR\cos\varphi}\, d\varphi \leq \pi e^{ta} \frac{R}{(R-a)^{n+1}} \quad .$$

Puisque $R > 2a > a + \|A\|$, il vient:

$$\|B_t(R)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{2\pi} \left| \int_{\Gamma''_R} \frac{e^{zt}}{z^{n+1}}\, dz \right| \leq \frac{e^{ta}}{2} \frac{R}{R-a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\|A\|}{R-a} \right)^n$$

et comme

$$\frac{\|A\|}{R-a} < 1 \quad ,$$

il en résulte que:

$$\|B_t(R)\| \leq e^{ta} \frac{\|A\|}{2} \frac{R}{R-a} \frac{1}{R-a-\|A\|} \quad ,$$

quel que soit $R > 2a$. Donc

$$\lim_{R\to\infty} B_t(R) = 0 \quad ,$$

uniformément par rapport à $t \in [t_1, t_2]$. Il s'ensuit donc que

$$\lim_{R\to\infty} I''_t(R) = 0 \quad ,$$

uniformément par rapport à $t \in [t_1, t_2]$.
Par conséquent:

$$T(t) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''_R} e^{zt} R(z; A)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - i\infty}^{Re\,\lambda + i\infty} e^{zt} R(z; A)\, dz \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $]0, \infty)$.■

Nous finissons cette section avec le théorème spectral pour les semi-groupes uniformément continus.

Théorème 1.3.13 (spectral mapping) *Soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors:*

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma\left(T(t)\right) \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve Montrons que $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma\left(T(t)\right)$, $(\forall) t \geq 0$.
Soit $\xi \in \sigma(A)$. Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'application:

$$g_\xi(\lambda) = \frac{e^{\xi t} - e^{\lambda t}}{\xi - \lambda}$$

est analytique dans un voisinage de $\sigma(A)$. Compte tenu du théorème 1.3.11, on voit que:

$$e^{\xi t} I - e^{At} = (\xi I - A) g_\xi(A) \quad .$$

Si $e^{\xi t} \in \rho\left(T(t)\right)$, alors il existe $Q = \left[e^{\xi t} I - T(t)\right]^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Par conséquent:

$$I = (\xi I - A) g_\xi(A) Q \quad ,$$

d'où il résulte que $\xi \in \rho(A)$, ce qui est absurde. Donc $e^{\xi t} \in \sigma\left(T(t)\right)$ et par suite $e^{t\sigma(A)} \subset \sigma\left(T(t)\right)$.
Montrons que $\sigma\left(T(t)\right) \subset e^{t\sigma(A)}$.
Soit $\mu \in \sigma\left(T(t)\right)$. Supposons par absurde que $\mu \notin e^{t\sigma(A)}$. Alors pour $\lambda \in \rho(A)$, l'application:

$$h(\lambda) = \left(\mu - e^{\lambda t}\right)^{-1}$$

est définie sur un voisinage du $\sigma(A)$. Donc:

$$h(A)\left(\mu I - e^{tA}\right) = I$$

et il en résulte que $\mu \in \rho\left(T(t)\right)$ et cela est absurde. Par suite $\mu \in e^{t\sigma(A)}$, d'où $\sigma\left(T(t)\right) \subset e^{t\sigma(A)}$. Finalement on voit que:

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma\left(T(t)\right) \quad , \quad (\forall) t \geq 0 \quad . \blacksquare$$

1.4 Notes

Les notions préséntées dans cet chapitre se trouvent en majorité des travaux concernant les semi-groupes d'opérateurs linéaires. Pour les propriétés de la pseudo-résolvante, on peut consulter [**Pa'83-1**, pag. 36].

De même, on peut trouver les opérateurs dissipatifs dans [**Pa'83-1**, pag. 13], [**Da'80**, pag. 52] et [**Ah'91**, pag. 30]. Une jolie généralisation pour ces opérateurs est donnée dans [**CHADP'87**, pag. 61].

Le théorème 1.3.5 a été montré pour la première fois indépendemment par Yosida dans [**Yo'36**] et par Nathan dans [**Na'35**]. Nous avons consulté aussi les preuves données par Pazy dans [**Pa'83-1**, pag. 2], Ahmed dans [**Ah'91**, pag. 4] et Davies dans [**Da'80**, pag. 19]. Compte tenu du ce théorème, on peut introduire la transformée de Laplace pour un semi-groupe uniformément continu et on peut montrer le théorème 1.3.11 et le théorème 1.3.13 comme des applications du calcul fonctionnel de Dunford ([**DS'67**, pag. 568]). Pour le théorème 1.3.12 on peut consulter [**Pa'83-1**, pag. 25].

Chapitre 2

Semi-groupes de classe C_0

2.1 Définitions. Propriétés élémentaires

Dans le cadre de ce paragraphe, nous introduisons une classe plus générale que la classe des semi-groupes uniformément continus et nous étudions leurs propriétés élémentaires.

Définition 2.1.1 *On appelle C_0-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{E}$ une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes:*
i) $T(0) = I$;
ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad (\forall)t, s \geq 0$;
iii) $\lim_{t\searrow 0} T(t)x = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$.

Définition 2.1.2 *On appelle générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, un opérateur A défini sur l'ensemble:*

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \mathcal{E} \,\middle|\, \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

par:

$$Ax = \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Remarque 2.1.3 Il est clair que le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe est un opérateur linéaire.

Remarque 2.1.4 Puisque:

$$\|T(t)x - x\| \leq \|T(t) - I\| \, \|x\|$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $t \geq 0$, il en résulte que les semi-groupes uniformément continus sont C_0-semi-groupes. Mais il existe des C_0-semi-groupes qui ne sont pas uniformément continus, comme nous pouvons le voir dans les exemples suivants.

Exemple 2.1.5 Soit:

$$\mathcal{C}[0,\infty) = \{ f : [0,\infty) \to \mathbf{R} |\, f \textit{ est uniformément continue et bornée} \} \quad .$$

Avec la norme $\|f\|_{\mathcal{C}[0,\infty)} = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |f(\alpha)|$, l'espace $\mathcal{C}[0,\infty)$ devient un espace de Banach. Définissons:

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha) \quad , \quad (\forall) t \geq 0 \text{ et } \alpha \in [0,\infty).$$

Evidemment $T(t)$ est un opérateur linéaire, et, en plus, on a:
i) $(T(0)f)(\alpha) = f(0+\alpha) = f(\alpha)$. Donc $T(0) = I$;
ii) $(T(t+s)f)(\alpha) = f(t+s+\alpha) = (T(t)f)(s+\alpha) = (T(t)T(s)f)(\alpha)$, $(\forall) f \in \mathcal{C}[0,\infty)$. Donc $T(t+s) = T(t)T(s)$, $(\forall) t, s \geq 0$;
iii) $\lim_{t \searrow 0} \|T(t)f - f\|_{\mathcal{C}[0,\infty)} = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |f(t+\alpha) - f(\alpha)| \right\} = 0$, $(\forall) f \in \mathcal{C}[0,\infty)$.
De même, nous avons:

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_{\mathcal{C}[0,\infty)} &= \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |(T(t)f)(\alpha)| = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} |f(t+\alpha)| = \\ &= \sup_{\beta \in [t,\infty)} |f(\beta)| \leq \sup_{\beta \in [0,\infty)} |f(\beta)| = \|f\|_{\mathcal{C}[0,\infty)} \quad , \quad (\forall) t \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1$, $(\forall) t \geq 0$. Par conséquent $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{C}[0,\infty)$, nommé le C_0-semi-groupe de translation à droite.
Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{C}[0,\infty) \longrightarrow \mathcal{C}[0,\infty)$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$. Si $f \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$Af(\alpha) = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)f(\alpha) - f(\alpha)}{t} = \lim_{t \searrow 0} \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} = f'(\alpha) \quad ,$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent:

$$\mathcal{D}(A) \subset \{ f \in \mathcal{C}[0,\infty) \,|\, f' \in \mathcal{C}[0,\infty) \} \quad .$$

Si $f \in \mathcal{C}[0,\infty)$ tel que $f' \in \mathcal{C}[0,\infty)$, alors:

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}[0,\infty)} = \sup_{\alpha \in [0,\infty)} \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| \quad .$$

Mais:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{(T(t)f)(\alpha) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| = \left| \frac{f(\alpha+t) - f(\alpha)}{t} - f'(\alpha) \right| = \\
= \ & \left| \frac{1}{t} f(\tau)|_{\alpha}^{\alpha+t} - f'(\alpha) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_{\alpha}^{\alpha+t} [f'(\tau) - f'(\alpha)]\, d\tau \right| \leq \\
\leq \ & \frac{1}{t} \int_{\alpha}^{\alpha+t} |f'(\tau) - f'(\alpha)|\ d\tau \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à α pour $t \searrow 0$. Par suite:

$$\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f' \right\|_{\mathcal{C}[0,\infty)} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t \searrow 0,$$

d'où $f \in \mathcal{D}(A)$ et:

$$\{ f \in \mathcal{C}[0,\infty) \,|\, f' \in \mathcal{C}[0,\infty) \} \subset \mathcal{D}(A) \quad .$$

Par conséquent $\mathcal{D}(A) = \{ f \in \mathcal{C}[0,\infty) \,|\, f' \in \mathcal{C}[0,\infty) \}$ et $Af = f'$. Comme cet opérateur est non borné, compte tenu du théorème 1.3.5, il ne peut pas engendrer un semi-groupe uniformément continu.

Exemple 2.1.6 Considérons l'espace $L_p]0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$, avec la norme:

$$\|f\|_p = \left\{ \int_0^{\infty} |f(\alpha)|^p \ d\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Avec cette norme, $L_p]0,\infty)$, $1 \leq p < \infty$, est un espace de Banach. Définissons:

$$(T(t)f)(\alpha) = f(t+\alpha) \quad , \quad (\forall) t \geq 0 \text{ et } \alpha \in]0,\infty).$$

Nous avons:

$$\begin{aligned}
\|T(t)f\|_p \ &= \ \left\{ \int_0^{\infty} |(T(t)f)(\alpha)|^p \ d\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \int_0^{\infty} |f(\alpha+t)|^p \ d\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} = \\
&= \ \left\{ \int_t^{\infty} |f(\beta)|^p \ d\beta \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_0^{\infty} |f(\beta)|^p \ d\beta \right\}^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p \quad .
\end{aligned}$$

Donc $\|T(t)\| = 1$, $(\forall) t \geq 0$.
Il est évident que $T(0) = I$ et $T(t+s) = T(t)T(s)$, $(\forall) t, s \geq 0$.

De plus, on a:

$$\lim_{t\searrow 0}\|T(t)f-f\|_p=\lim_{t\searrow 0}\left\{\int_0^\infty |(T(t)f)(\alpha)-f(\alpha)|^p\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\lim_{t\searrow 0}\left\{\int_0^\infty |f(\alpha+t)-f(\alpha)|^p\,d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}}=0 \quad .$$

Par suite $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur $L_p]0,\infty)$. Soit $A:\mathcal{D}(A)\subset L_p]0,\infty)\longrightarrow L_p]0,\infty)$ le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $f\in\mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$Af(\alpha)=\lim_{t\searrow 0}\frac{T(t)f(\alpha)-f(\alpha)}{t}=\lim_{t\searrow 0}\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t}=f'(\alpha)$$

uniformément par rapport à α. Par conséquent:

$$\mathcal{D}(A)\subset\{f\in L_p]0,\infty)\,|f'\in L_p]0,\infty)\} \quad .$$

Si $f\in L_p]0,\infty)$ tel que $f'\in L_p]0,\infty)$, alors on a:

$$\left\|\frac{T(t)f-f}{t}-f'\right\|_p=\left\{\int_0^\infty\left|\frac{(T(t)f)(\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right|^p d\alpha\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Mais:

$$\left|\frac{(T(t)f)(\alpha)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right|=\left|\frac{f(\alpha+t)-f(\alpha)}{t}-f'(\alpha)\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{1}{t}f(\tau)\right]\Big|_\alpha^{\alpha+t}-\left[\frac{1}{t}f'(\alpha)\tau\right]\Big|_\alpha^{\alpha+t}\right|=\left|\frac{1}{t}\int_\alpha^{\alpha+t}[f'(\tau)-f'(\alpha)]\,d\tau\right|\longrightarrow 0$$

uniformément par rapport à α si $t\searrow 0$. Alors:

$$\left\|\frac{T(t)f-f}{t}-f'\right\|_p\longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad t\searrow 0$$

et on voit que:

$$\{f\in L_p]0,\infty)\,|f'\in L_p]0,\infty)\}\subset\mathcal{D}(A) \quad .$$

Par conséquent:

$$\mathcal{D}(A)=\{f\in L_p]0,\infty)\,|f'\in L_p]0,\infty)\}$$

et $Af=f'$.

Théorème 2.1.7 *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une famille ayant les propriétés:*
i) $T(0) = I$;
ii) $T(t+s) = T(t)T(s) \quad , \quad (\forall)t, s \geq 0.$
Les affirmations suivantes sont équivalentes:
iii') $\lim_{t\searrow 0} T(t) = I$ *dans la topologie forte;*
iii") $\lim_{t\searrow 0} T(t) = I$ *dans la topologie faible.*

Preuve $iii') \Longrightarrow iii'')$ Cette implication est évidente.
$iii'') \Longrightarrow iii')$ Supposons que:

$$\lim_{t\searrow 0} T(t) = I$$

dans la topologie faible. Alors, pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $x^* \in \mathcal{E}^*$ on a:

$$\lim_{t\searrow 0} \langle T(t)x, x^* \rangle = \langle x, x^* \rangle \quad .$$

Si $t_0 > 0$, alors pour tout $h > 0$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} & |\langle T(t_0+h)x, x^* \rangle - \langle T(t_0)x, x^* \rangle| = \\ = \ & |\langle T(t_0)T(h)x, x^* \rangle - \langle T(t_0)x, x^* \rangle| = \\ = \ & |\langle T(t_0)[T(h)x - x], x^* \rangle| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad h \searrow 0, \end{aligned}$$

quel que soit $x \in \mathcal{E}$ et $x^* \in \mathcal{E}^*$. Par suite, l'application:

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est faiblement continue à droite sur $[0, \infty)$ et on voit qu'elle est faiblement continue sur $]0, \infty)$. En particulier, elle est faiblement mesurable sur $]0, \infty)$. Pour $x \in \mathcal{E}$ arbitrairement fixé, considérons l'application:

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

et désignons par:

$$\mathcal{I}m\ T(\ .\ )x = \{T(t)x | t \in [0, \infty)\}$$

son image. Supposons que l'ensemble:

$$\mathcal{K}_x = \{T(q)x | q \in \mathbf{Q}_+^*\} \subset \mathcal{I}m\ T(\ .\ )x$$

n'est pas dense dans $\mathcal{I}m\ T(\ .\ )x$. Alors, il existe $t_0 \in [0, \infty)$ tel que $T(t_0)x \in \mathcal{I}m\ T(\ .\ )x$ et:

$$d\,(T(t_0)x, \mathcal{K}_x) > 0 \quad .$$

En appliquant un corollaire du théorème de Hahn-Banach ([**DS'67**, Corollary II.3.13, pag. 64]), on voit qu'il existe $x_0^* \in \mathcal{E}^*$ tel que:

$$\langle k_n, x_0^* \rangle = 0 \quad , \quad (\forall) k_n \in \mathcal{K}_x$$

et:

$$\langle T(t_0)x, x_0^* \rangle = 1 \quad .$$

Soit $t_n \in \mathbf{Q}_+^*$ tel que $\lim_{n\to\infty} t_n = t_0$. Alors, compte tenu de la continuité faible de l'application considérée, il vient:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle T(t_n)\, x, x_0^* \rangle = \langle T(t_0)x, x_0^* \rangle = 1 \quad ,$$

ce qui est absurde. Il s'ensuit que:

$$\overline{\mathcal{K}_x} = \mathcal{I}m\ T(\,.\,)x \quad ,$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$. Par conséquent, l'application considérée a une image séparable. En appliquant le théorème de Pettis ([**Hi'48**, Theorem 3.2.2, pag. 36]), il vient que cette application est fortement mesurable sur $]0, \infty)$. Alors, il résulte que pour tout $x_n \in \mathcal{E}$ avec $\|x\| \leq 1$, l'application:

$$\|T(\,.\,)\| = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|T(\,.\,)x_n\| < \infty$$

est mesurable sur $]0, \infty)$. Montrons que l'application $\|T(\,.\,)\|$ est bornée sur les intevalles $[\alpha, \beta] \subset]0, \infty)$. Compte tenu du théorème de Banach-Steinhaus ([**DS'67**, Theorem II.1.11, pag. 52]), il est suffisant de montrer que $\|T(\,.\,)x\|$ est bornée sur les intervalles $[\alpha, \beta]$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Soient $\alpha, \beta \in]0, \infty)$. Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que pour tout $M > 0$ on puisse trouver $s \in [\alpha; \beta]$ tel que:

$$\|T(s)x_0\| > M \quad .$$

Donc il existe $t_n \in [\alpha, \beta]$, $n \in \mathbf{N}$, tel que:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \tau \in [\alpha, \beta]$$

et:

$$\|T(t_n)x_0\| > n \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}.$$

D'autre part, l'application $\|T(\,.\,)x_0\|$ est mesurable sur $]0, \infty)$. Donc il existe une constante $K > 0$ et un ensemble mesurable $\mathbf{F} \subset [0, \tau]$ avec $m(\mathbf{F}) > \frac{\tau}{2}$ tel que:

$$\sup_{t\in\mathbf{F}} \|T(t)x_0\| \leq K \quad .$$

Si nous considérons:

$$\mathbf{E}_n = \{t_n - \eta | \eta \in \mathbf{F} \cap [0, t_n]\} \quad ,$$

on voit que $\mathbf{E}_n$ est un ensemble mesurable et pour n suffisamment grand, nous obtenons:

$$m(\mathbf{E}_n) \geq \frac{\tau}{2} \quad .$$

Alors, pour tout $\eta \in \mathbf{F} \cap [0, t_n]$, $n \in \mathbf{N}$, nous avons:

$$n \leq \|T(t_n)x_0\| \leq \|T(t_n - \eta)\| \, \|T(\eta)x_0\| \leq \|T(t_n - \eta)\|K \quad ,$$

d'où:

$$\|T(t)\| \geq \frac{n}{K} \quad , \quad (\forall)t \in \mathbf{E}_n.$$

Si nous notons:

$$\mathbf{E} = \limsup_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{E}_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} \mathbf{E}_k \quad ,$$

alors on voit que:

$$m(\mathbf{E}) \geq \frac{\tau}{2}$$

et:

$$\|T(t)\| = \infty \quad , \quad (\forall)t \in \mathbf{E}$$

ce qui est absurde. Par conséquent, il existe $M > 0$ tel que:

$$\|T(t)\| \leq M \quad , \quad (\forall)t \in [\alpha, \beta].$$

Soient $\alpha, \beta, t, t_0 \in]0, \infty)$ tel que:

$$0 < \alpha < t < \beta < t_0$$

et $\varepsilon > 0$ tel que $\beta < t_0 - \varepsilon$. Alors pour tout $x \in \mathcal{E}$, l'application:

$$[\alpha, \beta] \ni t \longmapsto T(t_0)x = T(t)T(t_0 - t)x \in \mathcal{E}$$

ne dépend pas de t, donc elle est Bôchner intégrable par rapport à $t \in [\alpha, \beta]$ et pour tout $x \in \mathcal{E}$ on a:

$$(\beta - \alpha) \left[T(t_0 \pm \varepsilon)x - T(t_0)x\right] \, dt =$$
$$= \int_\alpha^\beta T(t) \left[T(t_0 \pm \varepsilon - t)x - T(t_0 - t)x\right] \, dt \quad ,$$

d'où:

$$\begin{aligned}
&|\beta-\alpha|\|T(t_0\pm\varepsilon)x-T(t_0)x\| \le \\
\le\ & \int_\alpha^\beta \|T(t)\|\,\|T(t_0\pm\varepsilon-t)x-T(t_0-t)x\|\,dt \le \\
\le\ & M\int_{t_0-\beta}^{t_0-\alpha}\|T(\tau\pm\varepsilon)x-T(\tau)x\|\,d\tau \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \varepsilon\searrow 0 \quad ,
\end{aligned}$$

compte tenu de [**Hi'48**, théorème 3.6.3, pag.46]. Il s'ensuit que l'application:

$$[0,\infty)\ni t\longmapsto T(t)\in\mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est fortement continue sur $]0,\infty)$.
En particulier, pour $x\in\mathcal{E}$ arbitrairement fixé, l'ensemble:

$$\mathcal{X}=\{T(t)x|t\in[0,1]\}$$

est séparable. Donc il contient une partie dénombrable dense:

$$\mathcal{X}_0=\{T(t_n)x|t_n\in]0,1[,\ n\in\mathbf{N}\} \quad .$$

Par conséquent, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{X}_0$ tel que:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=\lim_{n\to\infty}\|T(t_n)x-x\|=0 \quad .$$

Comme:

$$\begin{aligned}
&\|T(t)x-x\|\le \\
\le\ & \|T(t)x-T(t+t_n)x\|+\|T(t+t_n)x-T(t_n)x\|+\|T(t_n)x-x\|\le \\
\le\ & \|T(t)\|\,\|x-T(t_n)x\|+\|T(t+t_n)x-T(t_n)x\|+\|T(t_n)x-x\|\le \\
\le\ & \left(\sup_{t\in[0,1]}\|T(t)\|+1\right)+\|T(t+t_n)x-T(t_n)x\| \quad ,
\end{aligned}$$

il vient:

$$\lim_{t\searrow 0}T(t)x=x \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E}$$

et par conséquent:

$$\lim_{t\searrow 0}T(t)=I$$

dans la topologie forte.■

Dans la suite, nous considérons la topologie forte pour étudier les propriétés des C_0-semi-groupes.

Théorème 2.1.8 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés. Alors:*
i) il existe $\tau > 0$ et $M \geq 1$ tel que:

$$\|T(t)\| \leq M \quad , \quad (\forall)t \in [0, \tau];$$

ii) il existe $\omega \in \mathbf{R}$ et $M \geq 1$ tel que:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Preuve i) Supposons que pour tout $\tau > 0$ et tout $M \geq 1$, il existe $t \in [0, \tau]$ tel que $\|T(t)\| > M$. Pour $\tau = \frac{1}{n}$ et $M = n \in \mathbf{N}^*$, il existe $t_n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ tel que $\|T(t_n)\| > n$. Donc la suite $(\|T(t_n)\|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est non bornée. Si la suite $(\|T(t_n)x\|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ était bornée pour tout $x \in \mathcal{E}$, alors compte tenu du théorème de Banach-Steinhaus ([**DS'67**, Theorem II.1.11, pag. 52]), il en résulterait que $(\|T(t_n)\|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ serait bornée, mais cela contredit l'affirmation précédente. Donc il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que $(\|T(t_n)x_0\|)_{n\in\mathbf{N}^*}$ soit non bornée. D'autre part, compte tenu de la définition 2.1.1 (iii), il résulte que $\lim_{n\to\infty} \|T(t_n)x_0\| = x_0$ et cela est contradictoire.
ii) Pour $h > 0$ et $t > h$, nous noterons $m = \left[\frac{t}{h}\right] \in \mathbf{N}^*$. Compte tenu du théorème de division avec reste, il existe $r \in [0, h)$ tel que $t = mh + r$. Alors:

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &= \|T(mh)T(r)\| \leq \|T(h)\|^m \|T(r)\| \leq \\ &\leq M^m M \leq Me^{\frac{t}{h}\ln M} \quad .\end{aligned}$$

L'inégalité de l'énoncé en résulte en prenant $\omega = \frac{1}{h}\ln M$.■

Corollaire 2.1.9 *Si $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe, alors l'application:*

$$[0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est continue sur $[0, \infty)$, quel que soit $x \in \mathcal{E}$.

Preuve Soient $t_0, h \in [0, \infty)$ et $x \in \mathcal{E}$.
Si $t_0 < h$, nous avons:

$$\begin{aligned}&\|T(t_0 + h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0)\| \, \|T(h)x - x\| \leq \\ \leq \; &Me^{\omega t_0} \|T(h)x - x\| \quad .\end{aligned}$$

Si $t_0 > h$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \|T(t_0-h)x - T(t_0)x\| \leq \|T(t_0-h)\| \, \|T(h)x - x\| \leq \\ \leq \; & Me^{\omega(t_0-h)} \|T(h)x - x\| \quad . \end{aligned}$$

La continuité forte en t_0 de l'application considérée dans l'énoncé est évidente.$\blacksquare$

Définition 2.1.10 *On dit que le C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est uniformément borné s'il existe $M \geq 1$ tel que:*

$$\|T(t)\| \leq M \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Théorème 2.1.11 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe pour lequel il existe $\omega \in \mathbf{R}$ et $M \geq 1$ tel que:*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Alors la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$, où:

$$S(t) = e^{-\omega t}T(t) \quad , \quad (\forall)t \geq 0,$$

est un C_0-semi-groupe ayant la propriété:

$$\|S(t)\| \leq M \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

De plus, si A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, alors le C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur $B = A - \omega I$.

Preuve Dans les conditions du théorème, il est évident que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe et:

$$\|S(t)\| = \left\|e^{\omega t}T(t)\right\| \leq e^{-\omega t}Me^{\omega t} = M \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Donc $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe uniformément borné. Soit A le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si B est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \searrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{e^{-\omega h}T(h)x - x}{h} = \\ = \; & \lim_{h \searrow 0} \frac{\left(e^{-\omega h} - 1\right) T(h)x}{h} + \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \\ = \; & -\omega x + Ax = (A - \omega I)x \quad , \end{aligned}$$

d'où il résulte que $x \in \mathcal{D}(B)$ et $Bx = (A - \omega I)x$. Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors, nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \searrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{e^{\omega h} S(h)x - x}{h} = \\ = & \lim_{h \searrow 0} \frac{\left(e^{\omega h} - 1\right) S(h)}{h} + \lim_{h \searrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} = \\ = & (\omega I + B)x \quad , \end{aligned}$$

d'où il vient que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = (\omega I + B)x$. Par conséquent $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et $B = A - \omega I$.■

Remarque 2.1.12 Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semi-groupe pour lequel il existe $\omega \in \mathbf{R}$ et $M \geq 1$ tel que:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Si $\omega < 0$, alors nous obtenons:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \leq M \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Par conséquent on peut considérer que $\omega \geq 0$.

Nous noterons par $\mathcal{SG}(M, \omega)$ l'ensemble des C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour lesquels il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0\,.$$

Avec le théorème 2.1.11 nous voyons que le passage entre la classe $\mathcal{SG}(M, \omega)$ avec $\omega > 0$ et la classe $\mathcal{SG}(M, 0)$ est très simple.

2.2 Propriétés générales des C_0-semi-groupes

Proposition 2.2.1 *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a l'égalité:*

$$T(t)Ax = AT(t)x \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve Soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors pour tout $t \geq 0$, nous avons:

$$\begin{aligned} T(t)Ax &= T(t)\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)x-x}{h} = \\ &= \lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)T(t)x-T(t)x}{h} \quad . \end{aligned}$$

Donc $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et on a $T(t)Ax = AT(t)x$, $(\forall)t \geq 0$.■

Remarque 2.2.2 On voit que:

$$T(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A) \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Théorème 2.2.3 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors l'application:*

$$[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est dérivable sur $[0,\infty)$*, pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$ *et nous avons:*
i) $\frac{d}{dt}T(t)x = T(t)Ax = AT(t)x \quad , \quad (\forall)t \geq 0;$
ii) $T(t)x - x = \int\limits_0^t T(s)Ax\,ds \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$

Preuve i) Soient $x \in \mathcal{D}(A)$, $t \geq 0$ et $h > 0$. Alors:

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h} - T(t)Ax\right\| \leq \|T(t)\| \left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| \leq \\ &\leq Me^{\omega t}\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(t+h)x-T(t)x}{h} = T(t)Ax \quad ,$$

d'où:

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = T(t)Ax \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Si $t-h > 0$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h} - T(t)Ax\right\| \leq \\ &\leq \|T(t-h)\| \left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax + Ax - T(h)Ax\right\| \leq \\ &\leq Me^{\omega(t-h)}\left(\left\|\frac{T(h)x-x}{h} - Ax\right\| + \|T(h)Ax - Ax\|\right) \quad . \end{aligned}$$

Par suite:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(t-h)x-T(t)x}{-h}=T(t)Ax$$

et:

$$\frac{d^-}{dt}T(t)x=T(t)Ax \quad , \quad (\forall)t\geq 0.$$

Il s'ensuit que l'application considérée dans l'énoncé est dérivable sur $[0,\infty)$, quel que soit $x\in\mathcal{D}(A)$. De plus, on a l'égalité:

$$\frac{d}{dt}T(t)x=T(t)Ax=AT(t)x \quad , \quad (\forall)t\geq 0.$$

ii) Si $x\in\mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$\frac{d}{ds}T(s)x=T(s)Ax \quad , \quad (\forall)s\in[0,t]\;,\;t\geq 0,$$

d'où:

$$\int_0^t T(s)Ax\,ds=\int_0^t\frac{d}{ds}T(s)\,ds=T(t)x-x \quad , \quad (\forall)t\geq 0.\blacksquare$$

On peut obtenir une formule de représentation de type Taylor pour les C_0-semi-groupes avec la généralisation du théorème 2.2.3 (ii).

Théorème 2.2.4 (Taylor) *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}\in\mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors:*

$$T(t)x=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{t^i}{i!}A^ix+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t(t-u)^{n-1}T(u)A^nx\,du$$

quels que soient $x\in\mathcal{D}(A^n)$, $t\geq 0$ et $n\in\mathbf{N}^*$.

Preuve Compte tenu du théorème 2.2.3 (ii), pour $x\in\mathcal{D}(A)$ et $t\geq 0$ on a:

$$T(t)x=x+\int_0^t T(u)Ax\,du \quad .$$

Supposons que pour $t\geq 0$ et $x\in\mathcal{D}(A^k)$ nous ayons:

$$T(t)x=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!}A^ix+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t(t-u)^{k-1}T(u)A^kx\,du \quad .$$

Si $x\in\mathcal{D}(A^{k+1})$, alors $x\in\mathcal{D}(A^k)$ et $A^kx\in\mathcal{D}(A)$. Il en résulte que:

$$T(t)x=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!}A^ix+\frac{1}{(k-1)!}\int_0^t(t-s)^{k-1}T(s)A^nx\,ds \quad .$$

Mais:

$$T(s)x = x + \int_0^s T(u)Ax\,du \quad .$$

Il vient:

$$(t-s)^{k-1}T(s)A^k x = (t-s)^{k-1}A^k x + (t-s)^{k-1}\int_0^s T(u)A^{k+1}x\,du$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (t-s)^{k-1}T(s)A^k x\,ds = \\
&= \int_0^t (t-s)^{k-1}A^k x\,ds + \int_0^t (t-s)^{k-1}\int_0^s T(u)A^{k+1}x\,du\,ds = \\
&= \frac{t^k}{k}A^k x + \int_0^t \int_u^t (t-s)^{k-1}T(u)A^{k+1}x\,ds\,du = \\
&= \frac{t^k}{k}A^k x + \int_0^t \frac{(t-u)^k}{k}T(u)A^{k+1}x\,du \quad .
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que:

$$\begin{aligned}
T(t)x &= \sum_{i=0}^{k-1}\frac{t^i}{i!}A^i x + \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{t^k}{k}A^k x + \frac{1}{k}\int_0^t (t-u)^k T(u)A^{k+1}x\,du\right] = \\
&= \sum_{i=0}^{k}\frac{t^i}{k!}A^i x + \frac{1}{k!}\int_0^t (t-u)^k T(u)A^{k+1}x\,du \quad ,
\end{aligned}$$

d'où il résulte l'égalité considérée dans l'énoncé.■

Lemme 2.2.5 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Alors:*

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = T(t)x$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$.

Preuve L'égalité de l'énoncé résulte de l'évaluation:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - T(t)x\right\| = \left\|\frac{1}{h}\int_t^{t+h}(T(s)-T(t))\,x\,ds\right\| \leq \\
&\leq \sup_{s\in[t,t+h]}\|T(s)x - T(t)x\|
\end{aligned}$$

et de la continuité de l'application $[0,\infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$.■

Proposition 2.2.6 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in \mathcal{E}$, *alors* $\int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$ *et on a l'égalité:*

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Preuve Soient $x \in \mathcal{E}$ et $h > 0$. Alors:

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t T(s+h)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds =$$

$$= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)x\,ds =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^t T(u)x\,du =$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(u)x\,du - \frac{1}{h}\int_0^h T(u)x\,du \quad .$$

Par pasage à limite pour $h \searrow 0$ et compte tenu du lemme 2.2.5, nous obtenons:

$$A\int_0^t T(s)x\,ds = T(t)x - x \quad , \quad (\forall)t \geq 0$$

et:

$$\int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A).\blacksquare$$

Théorème 2.2.7 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors:*
i) $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;
ii) A *est un opérateur fermé.*

Preuve i) Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, tel que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Alors:

$$x_n = \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A) \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N},$$

d'où:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n}\int_0^{t_n} T(s)x\,ds = T(0)x = x \quad .$$

Par conséquent $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.
ii) Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$. Alors:

$$\|T(s)Ax_n - T(s)y\| \leq \|T(s)\| \, \|Ax_n - y\| \leq Me^{\omega t} \, \|Ax_n - y\|$$

quel que soit $s \in [0,t]$. Par suite $T(s)Ax_n \longrightarrow T(s)y$, pour $n \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0,t]$.
D'autre part, puisque $x_n \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n \, ds \quad ,$$

d'où:

$$\lim_{n\to\infty} [T(t)x_n - x_n] = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(s)Ax_n \, ds \quad ,$$

ou bien:

$$T(t)x - x = \int_0^t T(s)y \, ds \quad .$$

Finalement, on voit que:

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)y \, ds = y \quad .$$

Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et $Ax = y$, d'où il résulte que A est un opérateur fermé.■

Nous montrons maintenant un résultat qui concerne l'unicité de l'engendrement pour les C_0-semi-groupes.

Théorème 2.2.8 (l'unicité de l'engendrement) *Soient deux C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A. Alors:*

$$T(t) = S(t) \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Preuve Soient $t > 0$ et $x \in \mathcal{D}(A)$. Définissons l'application:

$$[0,t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)S(s)x \in \mathcal{D}(A).$$

Alors:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}S(s)x = \\ &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)AS(s)x = 0 \end{aligned}$$

quel que soit $x \in \mathcal{D}(A)$. Par suite $U(0)x = U(t)x$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, d'où:

$$T(t)x = S(t)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ et $T(t), S(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, pour tout $t \geq 0$, il résulte que:

$$T(t)x = S(t)x \quad , \quad (\forall)t \geq 0 \text{ et } x \in \mathcal{E} \quad ,$$

ou bien:

$$T(t) = S(t) \quad , \quad (\forall)t \geq 0. \blacksquare$$

Théorème 2.2.9 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe, A son générateur infinitésimal et $F \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Alors $T(t)F = FT(t)$ pour tout $t \geq 0$ si et seulement si:*

$$F\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et:

$$FAx = AFx \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Preuve $\Longrightarrow$ Soit $F \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ tel que:

$$T(t)F = FT(t) \quad , \quad (\forall)t \geq 0$$

et $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors, nous avons:

$$\begin{aligned} \lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)Fx - Fx}{t} &= \lim_{t\searrow 0} \frac{FT(t)x - Fx}{t} = \\ = \lim_{t\searrow 0} F\frac{T(t)x - x}{t} & \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent $Fx \in \mathcal{D}(A)$ et on a $AFx = FAx$, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$.
$\Longleftarrow$ Soit $F \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ tel que:

$$F\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et

$$AFx = FAx \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$, définissons l'application:

$$[0,t] \ni s \longmapsto U(s)x = T(t-s)FT(s)x \in \mathcal{D}(A) \quad .$$

Alors nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}U(s)x &= \frac{d}{ds}T(t-s)FT(s)x + T(t-s)\frac{d}{ds}FT(s)x = \\ &= -AT(t-s)FT(s)x + T(t-s)FAT(s)x = 0 \quad , \end{aligned}$$

compte tenu de la commutativité. Par conséquent:

$$U(0)x = U(t)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où on obtient:

$$T(t)Fx = FT(t)x \quad ,$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{D}(A)$. Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ et $T(t)F, FT(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ pour tout $t \geq 0$, nous obtenons:

$$T(t)Fx = FT(t)x \quad ,$$

pour tout $t \geq 0$ et tout $x \in \mathcal{E}$.■

Nous finissons cette section avec une généralisation du théorème 2.2.7.

Théorème 2.2.10 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors:*
i) $\overline{\mathcal{D}(A^p)} = \mathcal{E}$, *quel que soit* $p \in \mathbf{N}^*$*;*
ii) A^p *est un opérateur fermé, quel que soit* $p \in \mathbf{N}^*$*;*
iii) l'application:

$$\|\,.\,\|_{\mathcal{D}(A^p)} : \mathcal{D}(A^p) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \quad ,$$
$$\|x\|_{\mathcal{D}(A^p)} = \sum_{i=0}^{p} \left\|A^i x\right\|$$

est une norme avec laquelle $\mathcal{D}(A^p)$ *devient un espace de Banach, pour tout* $p \in \mathbf{N}^*$.

Preuve i) Pour $p = 1$, compte tenu du théorème 2.2.7(i), il résulte que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$. Soit:

$$\mathcal{C}_0^\infty = \{\varphi :]0,\infty) \to \mathcal{E} \,|\, \varphi \text{ indéfiniment dérivable avec un support compact}\}.$$

Notons:

$$\mathcal{F} = \left\{ \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x\,dt \,\middle|\, x \in \mathcal{E}\,,\ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty \right\}.$$

Nous montrons que $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(A^p)$, $(\forall)p \in \mathbf{N}$.
Pour $y \in \mathcal{F}$ et $h > 0$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h}\, y &= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty \varphi(t)T(t+h)x\,dt - \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x\,dt\right) = \\ &= \int_0^\infty \frac{\varphi(u-h) - \varphi(u)}{h} T(u)x\,du \quad . \end{aligned}$$

Puisque:

$$\frac{\varphi(u-h)-\varphi(u)}{h}T(u)x \longrightarrow -\varphi(u)^{(1)}T(u)x \quad \text{si} \quad h \searrow 0,$$

uniformément par rapport à $u \in supp\ \varphi$, en passant à limite pour $h \searrow 0$, nous obtenons:

$$Ay = -\int_0^\infty \varphi(u)^{(1)}T(u)x\,du \quad .$$

Donc $y \in \mathcal{D}(A)$. Il en résulte que $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(A)$ et par récurrence on peut montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}(A^p)$ et:

$$A^p y = (-1)^p \int_0^\infty \varphi(t)^{(p)}T(t)x\,dt$$

quel que soit $p \in \mathbf{N}^*$.

Nous montrons maintenant que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{E}$.

Supposons que $\mathcal{F}$ n'est pas dense dans $\mathcal{E}$. Alors il existe $x_0 \in \mathcal{E}$ tel que $d(x_0, \mathcal{F}) > 0$. En appliquant un corollaire du théorème de Hahn-Banach ([**DS'67**, Corollary II.3.13, pag. 64]), on voit qu'il existe $x_0^* \in \mathcal{E}^*$ tel que $\langle x_0, x_0^*\rangle = 1$ et $\langle y, x_0^*\rangle = 0$, pour tout $y \in \mathcal{F}$. Alors:

$$\int_0^\infty \varphi(t)\langle T(t)x, x_0^*\rangle\,dt = \left\langle \int_0^\infty \varphi(t)T(t)x\,dt, x_0^*\right\rangle = 0 \quad , \quad (\forall)\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty \text{ et } x \in \mathcal{E}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathcal{E}$, nous avons:

$$\langle T(t)x, x_0^*\rangle = 0 \quad , \quad (\forall)t \in [0,\infty),$$

parce que dans le cas contraire, on peut trouver $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty$ tel que:

$$\int_0^\infty \varphi(t)\langle T(t)x, x_0^*\rangle\,dt \neq 0$$

ce qui est contradictoire. Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathcal{E}$, on a:

$$\langle T(t)x, x_0^*\rangle = 0 \quad , \quad (\forall)t \in [0,\infty),$$

d'où:

$$\langle x, x_0^*\rangle = \langle T(0)x, x_0^*\rangle = 0 \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

ce qui est absurde. Finalement, on voit que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{E}$ et donc $\overline{\mathcal{D}(A^n)} = \mathcal{E}$.

ii) Compte tenu du théorème 2.2.7(ii), on voit que:

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est un opérateur fermé. Supposons que:

$$A^k : \mathcal{D}(A^k) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est un opérateur fermé et montrons que:

$$A^{k+1} : \mathcal{D}(A^{k+1}) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est un opérateur fermé.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A^{k+1})$ tel que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

et:

$$\lim_{n\to\infty} A^{k+1}x_n = y \quad .$$

Mais $x_n \in \mathcal{D}(A^{k+1})$ est équivalent avec $x_n \in \mathcal{D}(A^k)$ et $A^k x_n \in \mathcal{D}(A)$. Alors $x_n \in \mathcal{D}(A^k)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, comme A^k est un opérateur fermé, ceci implique $x \in \mathcal{D}(A^k)$ et $\lim_{n\to\infty} A^k x_n = A^k x$. Comme $A^k x_n \in \mathcal{D}(A)$, $\lim_{n\to\infty} A^k x_n = A^k x$ et A est un opérateur fermé, il s'ensuit que $A^k x \in \mathcal{D}(A)$ et $\lim_{n\to\infty} A\left(A^k x_n\right) = A\left(A^k x\right)$. Nous avons obtenu donc que $x \in \mathcal{D}(A^{k+1})$, $A^k x \in \mathcal{D}(A)$ et $\lim_{n\to\infty} A^{k+1}x_n = A^{k+1}x$, d'où il résulte que $x \in \mathcal{D}(A^{k+1})$ et $A^{k+1}x = y$. Par conséquent A^{k+1} est un opérateur fermé, d'où on obtient (ii).
iii) Pour $p = 1$ on peut vérifier facilement les propriétés de norme de l'application:

$$\|\ .\ \|_{\mathcal{D}(A)} : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \quad ,$$

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A)} = \|x\| + \|Ax\| \quad .$$

Donc $\mathcal{D}(A)$ est un espace normé.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathcal{D}(A)$ tel que $\|x_m - x_n\|_{\mathcal{D}(A)} \longrightarrow 0$ pour $m, n \to \infty$. Alors:

$$\|x_m - x_n\| + \|Ax_m - Ax_n\| \longrightarrow 0 \text{ pour } m, n \to \infty.$$

Donc:

$$\|x_m - x_n\| \longrightarrow 0 \text{ et } \|Ax_m - Ax_n\| \longrightarrow 0 \text{ pour } m, n \to \infty.$$

Puis que $\mathcal{E}$ est un espace de Banach, il résulte que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(Ax_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes. Donc $x_n \longrightarrow x$ et $Ax_n \longrightarrow y$ pour $n \to \infty$. Comme A est un opérateur fermé, il résulte que $x \in \mathcal{D}(A)$ et $y = Ax$. Par conséquent:

$$\|x_n - x\|_{\mathcal{D}(A)} = \|x_n - x\| + \|Ax_n - Ax\| \longrightarrow 0 \text{ pour } n \to \infty.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente par rapport à la norme $\| \,.\, \|_{\mathcal{D}(A)}$. Il s'ensuit que $\mathcal{D}(A)$ est un espace de Banach avec la norme $\| \,.\, \|_{\mathcal{D}(A)}$.
Supposons que l'application:

$$\| \,.\, \|_{\mathcal{D}(A^k)} : \mathcal{D}(A^k) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \quad ,$$

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A^k)} = \sum_{i=0}^{k} \left\|A^i x\right\|$$

est une norme avec laquelle $\mathcal{D}(A^k)$ est un espace de Banach. Montrons que:

$$\| \,.\, \|_{\mathcal{D}(A^{k+1})} : \mathcal{D}(A^{k+1}) \longrightarrow \mathbf{R}_+ \quad ,$$

$$\|x\|_{\mathcal{D}(A^{k+1})} = \sum_{i=0}^{k+1} \left\|A^i x\right\|$$

est une norme avec laquelle $\mathcal{D}(A^{k+1})$ devient un espace de Banach. On peut vérifier facilement les propriétés de norme de l'application $\| \,.\, \|_{\mathcal{D}(A^{k+1})}$. Donc $\mathcal{D}(A^{k+1})$ est un espace normé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A^{k+1})$ tel que:

$$\|x_m - x_n\|_{\mathcal{D}(A^{k+1})} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad m, n \to \infty.$$

Alors nous avons:

$$\sum_{i=0}^{k+1} \left\|A^i x_m - A^i x_n\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad m, n \to \infty,$$

d'où il s'ensuit que:

$$\left\|A^i x_m - A^i x_n\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad m, n \to \infty,$$

pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$. Mais $\mathcal{E}$ est un espace de Banach. Donc pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$, les suites $(A^i x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont convergentes et comme les opérateurs A^i sont fermés pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k+1\}$, on voit que:

$$\left\|A^i x_n - A^i x\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k+1\}$. Par conséquent:

$$\sum_{i=0}^{k+1} \left\|A^i x_n - A^i x\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty,$$

d'où:

$$\|x_m - x\|_{\mathcal{D}(A^{k+1})} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Finalement, on voit que $\mathcal{D}(A^{k+1})$ est un espace de Banach et l'affirmation de l'énoncé en résulte.■

2.3 Le théorème de Hille - Yosida

Dans ce paragraphe nous présentons un résultat très important concernant les semi-groupes de classe C_0. Il s'agit du célèbre théorème de Hille-Yosida qui donne une caractérisation pour les opérateurs qui sont générateurs de C_0-semi-groupes. Nous avons besoin de quelques résultats intermédiaires. Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par Λ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, Re\lambda > \omega\}$.

Théorème 2.3.1 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors l'application:*

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt$$

définit un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{E}$, $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Preuve Soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Puisque $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$, nous avons:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0$$

et on voit que:

$$\left\| e^{-\lambda t} T(t)x \right\| \leq e^{-Re\lambda t} \|T(t)\| \, \|x\| \leq Me^{-(Re\lambda - \omega)t} \|x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

Définissons l'application:

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad ,$$

par:

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \quad .$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus, on a:

$$\|R_\lambda x\| \leq \int_0^\infty \left\|e^{-\lambda t}T(t)x\right\| dt \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

Si $x \in \mathcal{E}$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)x\,dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \\ &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds - \int_0^h e^{-\lambda s}T(s)x\,ds\right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s}T(s)x\,ds \quad . \end{aligned}$$

Par passage à limite, on obtient:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)R_\lambda x - R_\lambda x}{h} = \lambda R_\lambda x - x \quad .$$

Il en résulte que $R_\lambda x \in \mathcal{D}(A)$ et

$$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E},$$

ou bien

$$(\lambda I - A)R_\lambda x = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous obtenons:

$$\begin{aligned} R_\lambda Ax &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dt}T(t)x\,dt = \\ &= \left[e^{-\lambda t}T(t)x\right]\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt = x + \lambda R_\lambda x \quad , \end{aligned}$$

d'où:

$$R_\lambda(\lambda I - A)x = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Finalement, on voit que $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$.■

Remarque 2.3.2 On voit que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ on a:

$$\mathcal{I}m\ R(\lambda; A) = \mathcal{I}m\ R_\lambda \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et:

$$R(\lambda; A)\mathcal{D}(A) = R_\lambda \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A) \quad .$$

Définition 2.3.3 *L'opérateur:*

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \quad , \quad \lambda \in \Lambda_\omega,$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$.

Remarque 2.3.4 Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors nous avons:

$$\{\lambda \in \mathbf{C}\,|\, Re\lambda > \omega\} \subset \rho(A).$$

et:

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbf{C}\,|\, Re\lambda \leq \omega\}\,.$$

Théorème 2.3.5 *Soient* $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Pour tout* $\lambda \in \Lambda_\omega$ *on a:*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$. Alors:

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Compte tenu du théorème 2.3.1, si $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons $\lambda \in \rho(A)$ et:

$$R(\lambda; A)x = R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

De plus:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \quad .$$

Il est clair que:

$$\frac{d}{d\lambda} R(\lambda; A)x = -\int_0^\infty t e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}$$

et par récurrence on peut montrer que:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)x=(-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E} \text{ et } n\in\mathbf{N}^*.$$

D'autre part, avec la proposition 1.1.16 (iii) nous obtenons:

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda;A)x=(-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1}x \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E} \text{ et } n\in\mathbf{N}^*.$$

Par suite, on a:

$$(-1)^n n!R(\lambda;A)^{n+1}x=(-1)^n\int_0^\infty t^n e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E} \text{ et } n\in\mathbf{N}^*,$$

d'où il résulte que:

$$R(\lambda;A)^n x=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-\lambda t}T(t)x\,dt \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E} \text{ et } n\in\mathbf{N}^*.$$

De plus:

$$\|R(\lambda;A)^n x\|\le\frac{M\|x\|}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1}e^{-(Re\lambda-\omega)t}\,dt=$$

$$=\quad\frac{M\|x\|}{(n-1)!}\frac{n-1}{Re\lambda-\omega}\int_0^\infty t^{n-2}e^{-(Re\lambda-\omega)t}\,dt=\cdots=\frac{M\|x\|}{(Re\lambda-\omega)^n}$$

quels que soient $x\in\mathcal{E}$ et $n\in\mathbf{N}^*$. Par conséquent:

$$\|R(\lambda;A)^n\|\le\frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n} \quad , \quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*.\blacksquare$$

Lemme 2.3.6 *Soit $A:\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{E}$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes:*
i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)}=\mathcal{E}$;
ii) il existe $\omega\ge 0$ et $M\ge 1$ tel que $\Lambda_\omega\subset\rho(A)$ et pour $\lambda\in\Lambda_\omega$, on a:

$$\|R(\lambda;A)^n\|\le\frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n} \quad , \quad (\forall)n\in\mathbf{N}^*.$$

Alors pour tout $\lambda\in\Lambda_\omega$, nous avons:

$$\lim_{Re\lambda\to\infty}\lambda R(\lambda;A)x=x \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E}.$$

De plus $\lambda AR(\lambda;A)\in\mathcal{B}(\mathcal{E})$ et:

$$\lim_{Re\lambda\to\infty}\lambda AR(\lambda;A)x=Ax \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{D}(A).$$

Preuve Soient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $Re\lambda > \omega$. Alors $R(\lambda; A)(\lambda I - A)x = x$. Si $Re\lambda \to \infty$, nous avons:

$$\begin{aligned} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| &= \|R(\lambda; A)Ax\| \leq \|R(\lambda; A)\| \, \|Ax\| \leq \\ &\leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax\| \longrightarrow 0 \quad , \end{aligned}$$

d'où il résulte que:

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Soit $x \in \mathcal{E}$, puisque $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $x_n \longrightarrow x$ si $n \to \infty$. Nous avons:

$$\begin{aligned} & \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \leq \\ \leq \; & \|\lambda R(\lambda; A)x - \lambda R(\lambda; A)x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \\ \leq \; & \|\lambda R(\lambda; A)\| \, \|x - x_n\| + \|\lambda R(\lambda; A)x_n - x_n\| + \|x_n - x\| \leq \\ \leq \; & \frac{|\lambda| M}{Re\lambda - \omega}\|x - x_n\| + \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|Ax_n\| + \|x_n - x\| = \\ = \; & \frac{|\lambda| M + Re\lambda - \omega}{Re\lambda - \omega} \, \|x_n - x\| + \frac{M}{Re\lambda - \omega} \, \|Ax_n\| \quad . \end{aligned}$$

Mais $x_n \longrightarrow x$ si $n \to \infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ tel que:

$$\|x_{n_\varepsilon} - x\| < \varepsilon \, \frac{Re\lambda - \omega}{|\lambda| M + Re\lambda - \omega} \quad .$$

Par conséquent:

$$\|\lambda R(\lambda; A)x - x\| < \varepsilon + \frac{M}{Re\lambda - \omega} \, \|Ax_{n_\varepsilon}\| \quad ,$$

d'où:

$$\limsup_{Re\lambda \to \infty} \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| < \varepsilon \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E},$$

ou bien:

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

De plus:

$$\lambda A R(\lambda; A) = \lambda \left[\lambda I - (\lambda I - A)\right] R(\lambda; A) = \lambda \left[\lambda R(\lambda; A) - I\right] = \lambda^2 R(\lambda; A) - \lambda I.$$

Par suite, on a:

$$\begin{aligned} & \|\lambda A R(\lambda; A)x\| = \|\lambda \left[\lambda R(\lambda; A) - I\right] x\| \leq \\ \leq \; & |\lambda| \, \|\lambda R(\lambda; A)x - x\| \leq |\lambda| \left(\|\lambda R(\lambda; A)x\| + \|x\|\right) \leq \\ \leq \; & |\lambda| \left(\frac{|\lambda| M}{Re\lambda - \omega} + 1\right) \|x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

et on voit que $\lambda AR(\lambda;A) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$.
Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$\lambda R(\lambda;A)Ax = \lambda^2 R(\lambda;A) - \lambda I = \lambda AR(\lambda;A) \quad ,$$

d'où il résulte que:

$$\lim_{Re\lambda\to\infty} \lambda AR(\lambda;A)x = \lim_{Re\to\infty} \lambda R(\lambda;A)Ax = Ax \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).\blacksquare$$

Remarque 2.3.7 On peut dire que les opérateurs bornés $\lambda AR(\lambda;A)$ sont des approximations pour l'opérateur non borné A. C'est le motif pour lequel on introduit la définition suivante.

Définition 2.3.8 *La famille $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$, où $A_\lambda = \lambda AR(\lambda;A)$, pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, s'appelle l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A.*

Remarque 2.3.9 Evidemment, pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on voit que A_λ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\lambda}\right\}_{t\geq 0}$. Nous utiliserons cette famille pour montrer l'existence d'un C_0-semi-groupe engendré par A.

Lemme 2.3.10 *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire vérifiant les propriétés suivantes:*
i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;
ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a:

$$\|R(\lambda;A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda-\omega)^n} \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ est l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A, alors pour tous $\alpha,\beta \in \Lambda_\omega$ nous avons:

$$\left\|e^{tA_\alpha}x - e^{tA_\beta}x\right\| \leq M^2 te^{\omega t}\|A_\alpha x - A_\beta x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E} \text{ et } t \geq 0.$$

Preuve Soient $\alpha,\beta \in \Lambda_\omega$, $v \in [0,1]$ et $x \in \mathcal{E}$. Alors:

$$\frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right) = tA_\alpha e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x \quad .$$

On peut facilement vérifier que A_α, A_β, e^{vtA_α} et $e^{(1-v)tA_\beta}$ commutent quels que soient $\alpha,\beta \in \Lambda_\omega$ et $t \geq 0$. Nous obtenons:

$$\int_0^1 \frac{d}{dv}\left(e^{vtA_\alpha}e^{(1-v)tA_\beta}x\right)\,dv =$$

$$= \int_0^1 \left(te^{vtA_\alpha}A_\alpha e^{(1-v)tA_\beta}x - te^{vtA_\alpha}A_\beta e^{(1-v)tA_\beta}x\right)\,dv \quad ,$$

d'où:

$$e^{vtA_\alpha} e^{(1-v)tA_\beta} x\Big|_0^1 = \int_0^1 \left(te^{vtA_\alpha} e^{(1-v)tA_\beta} A_\alpha x - te^{vtA_\alpha} e^{(1-v)tA_\beta} A_\beta x \right) dv \quad ,$$

ou bien:

$$e^{tA_\alpha} x - e^{tA_\beta} x = t \int_0^1 e^{vtA_\alpha} e^{(1-v)tA_\beta} \left(A_\alpha x - A_\beta x \right) dv$$

quels que soient $t \geq 0$ et $x \in \mathcal{E}$. Nous en déduisons que:

$$\left\| e^{tA_\alpha} x - e^{tA_\beta} x \right\| \leq t \int_0^1 \left\| e^{vtA_\alpha} \right\| \left\| e^{(1-v)tA_\beta} \right\| \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\| dv \quad .$$

D'autre part, nous avons:

$$\begin{aligned}
& \left\| e^{tA_\alpha} \right\| = \left\| e^{t\left(\alpha^2 R(\alpha;A) - \alpha I\right)} \right\| = \left\| e^{-\alpha t I} e^{\alpha^2 t R(\alpha;A)} \right\| \leq \\
\leq \; & e^{-Re\alpha t} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \alpha^{2k} R(\alpha;A)^k}{k!} \right\| \leq e^{-Re\alpha t} \sum_{k=o}^{\infty} \frac{t^k |\alpha|^{2k} \left\| R(\alpha;A)^k \right\|}{k!} \leq \\
\leq \; & e^{-Re\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k |\alpha|^{2k} M}{k! (Re\alpha - \omega)^k} = M e^{-Re\alpha t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t|\alpha|^2}{Re\alpha - \omega} \right)^k}{k!} = \\
= \; & M e^{-Re\alpha t} e^{\frac{t|\alpha|^2}{Re\alpha - \omega}} = M e^{\frac{\omega Re\alpha + Im^2\alpha}{Re\alpha - \omega} t} \quad ,
\end{aligned}$$

quel que soient $\alpha \in \Lambda_\omega$ et $t \geq 0$. Soit $r > 1$ tel que:

$$\frac{\omega Re\alpha + Im^2\alpha}{Re\alpha - \omega} < \omega r \quad .$$

Alors, nous avons:

$$\omega Re\alpha + Im^2\alpha < \omega r Re\alpha - \omega^2 r \quad ,$$

d'où:

$$\omega Re\alpha < \omega r Re\alpha - \omega^2 r \quad ,$$

ou bien:

$$\omega^2 r < \omega(r-1) Re\alpha \quad .$$

Il en découle:

$$Re\alpha > \frac{r}{r-1} \omega \quad .$$

Par conséquent, pour tout $r > 1$ et tout $\alpha \in \Lambda_\omega$ tel que $Re\alpha > \frac{r}{r-1}\omega$, on obtient:

$$\left\| e^{tA_\alpha} \right\| \leq M e^{r\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0$$

et par passage à limite pour $r \searrow 1$, nous obtenons:

$$\left\| e^{tA_\alpha} \right\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

pour tout $\alpha \in \Lambda_\omega$. Il vient:

$$\begin{aligned} \left\| e^{tA_\alpha} x - e^{tA_\beta} x \right\| &\leq t \int_0^1 Me^{\omega vt} Me^{\omega(1-v)t} \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\| dv = \\ &= M^2 te^{\omega t} \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\| \end{aligned}$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $t \geq 0$.■

Maintenant nous présentons une variante du célèbre théorème de Hille - Yosida pour les semi-groupes de classe $\mathcal{SG}(M, \omega)$.

Théorème 2.3.11 (Hille - Yosida) *Un opérateur linéaire:*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ *si et seulement si:*
i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;
ii) il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Lambda_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, on a:

$$\left\| R(\lambda; A)^n \right\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve $\Longrightarrow$ On obtient cette implication en tenant compte du théorème 2.2.7 et du théorème 2.3.5.
$\Longleftarrow$ Supposons que l'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ posséde les propriétés (i) et (ii). Soit $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega}$, l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Compte tenu du lemme 2.3.6, il résulte que $A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et:

$$\lim_{Re\lambda \to \infty} A_\lambda x = Ax \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, soit $\{T_\lambda(t)\}_{t \geq 0} = \left\{ e^{tA_\lambda} \right\}_{t \geq 0}$ le semi-groupe uniformément continu engendré par A_λ. Avec le lemme 2.3.10, on a:

$$\left\| T_\alpha(t)x - T_\beta(t)x \right\| \leq M^2 te^{\omega t} \left\| A_\alpha x - A_\beta x \right\| \quad , \quad (\forall) \alpha, \beta \in \Lambda_\omega,\ x \in \mathcal{D}(A) \text{ et } t \geq 0.$$

Soient $[\mathcal{D}(A)]$ l'espace de Banach $\mathcal{D}(A)$ avec la norme $\| \, . \, \|_{\mathcal{D}(A)}$, et $\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)], \mathcal{E})$ l'espace des opérateurs linéaires bornés définis sur $[\mathcal{D}(A)]$ avec valeur dans $\mathcal{E}$, doté de la topologie forte. Notons par $\mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)],\mathcal{E}))$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0,\infty)$ à valeurs dans $\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)],\mathcal{E})$ doté de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Si $[a,b]\subset[0,\infty)$, alors pour tout $x\in\mathcal{D}(A)$ nous avons:

$$\sup_{t\in[a,b]}\|T_\alpha(t)x-T_\beta(t)x\|\leq M^2be^{\omega b}\left(\|A_\alpha x-Ax\|+\|A_\beta x-Ax\|\right)\longrightarrow 0$$

si $Re\alpha, Re\beta\to\infty$, d'où il résulte que $\left(\{T_\lambda(t)\}_{t\geq 0}\right)_{\lambda\in\Lambda_\omega}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{B}([\mathcal{D}(A)],\mathcal{E}))$. Donc, il existe un unique $T_0\in\mathcal{C}([0,\infty);\mathcal{B}(\mathcal{D}(A),\mathcal{E}))$ tel que $T_\lambda(t)x\longrightarrow T_0(t)x$, si $Re\lambda\to\infty$, quel que soit $x\in\mathcal{D}(A)$, pour la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Puisque:

$$\|T_\lambda(t)\|\leq Me^{\omega t}\quad,\quad(\forall)t\geq 0,$$

on obtient:

$$\|T_0(t)x\|\leq Me^{\omega t}\|x\|\quad,\quad(\forall)t\geq 0\text{ et }x\in\mathcal{D}(A)$$

Considérons l'application linéaire:

$$\Theta_0:\mathcal{D}(A)\longrightarrow\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})$$

$$\Theta_0x=T_0(\,.\,)x$$

quel que soit $[a,b]\subset[0,\infty)$. Comme nous avons:

$$\|\Theta_0x\|_{\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})}=\sup_{t\in[a,b]}\|T_0(t)x\|\leq Me^{\omega b}\|x\|\leq Me^{\omega b}\|x\|_{\mathcal{D}(A)}\quad,\quad(\forall)x\in\mathcal{D}(A),$$

on voit que Θ_0 est une application continue et puisque $\overline{\mathcal{D}(A)}=\mathcal{E}$, elle se prolonge de façon unique en une application linéaire continue:

$$\Theta:\mathcal{E}\longrightarrow\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})$$

telle que:

$$\Theta|_{\mathcal{D}(A)}=\Theta_0$$

et:

$$\|\Theta x\|_{\mathcal{C}([a,b];\mathcal{E})}\leq Me^{\omega b}\|x\|$$

quel que soit $x\in\mathcal{E}$. Par conséquent, il existe un seul opérateur $T\in\mathcal{C}([a,b];\mathcal{B}(\mathcal{E}))$ tel que:

$$\Theta x=T(\,.\,)x\quad,\quad(\forall)x\in\mathcal{E}.$$

On peut répéter ce procédé pour tous les intervalles compacts de $[0, \infty)$ et on voit qu'il existe un seul opérateur, noté aussi par $T \in \mathcal{C}([0, \infty); \mathcal{B}(\mathcal{E}))$, tel que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on ait:

$$T_\lambda(t)x \longrightarrow T(t)x \quad \text{si} \quad Re\lambda \to \infty,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$. De plus:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Il est évident que:

$$T(0)x = \lim_{Re\lambda \to \infty} T_\lambda(0)x = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}$$

et:

$$\lim_{t \searrow 0} T(t)x = \lim_{t \searrow 0} \left(\lim_{Re\lambda \to \infty} T_\lambda(t)x \right) = \lim_{Re\lambda \to \infty} \left(\lim_{t \searrow 0} T_\lambda(t)x \right) = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

Soient $t, s \in [0, \infty)$ et $x \in \mathcal{E}$. Alors, nous avons:

$$\begin{aligned}
& \|T(t+s)x - T(t)T(s)x\| \leq \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \\
+ \quad & \|T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T(s)x\| + \|T_\lambda(t)T(s)x - T(t)T(s)x\| \leq \\
\leq \quad & \|T(t+s)x - T_\lambda(t+s)x\| + \|T_\lambda(t)\| \, \|T_\lambda(s)x - T(s)x\| + \\
+ \quad & \|T_\lambda(t)\,(T(s)x) - T(t)\,(T(s)x)\| \quad .
\end{aligned}$$

Puisque $T_\lambda(t) \longrightarrow T(t)$, si $Re\lambda \to \infty$, pour la topologie forte de $\mathcal{B}(\mathcal{E})$, il s'ensuit que $T(t+s)x = T(t)T(s)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$.
Par conséquent $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$.
Montrons que A est le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$.
Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a:

$$\begin{aligned}
& \|T_\lambda(s)A_\lambda x - T(s)Ax\| \leq \\
\leq \quad & \|T_\lambda(s)\| \, \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \leq \\
\leq \quad & Me^{\omega t} \, \|A_\lambda x - Ax\| + \|T_\lambda(s)Ax - T(s)Ax\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

si $Re\lambda \to \infty$, uniformément par rapport à $s \in [0, t]$, d'où:

$$T(t)x - x = \lim_{Re\lambda \to \infty} [T_\lambda(t)x - x] = \lim_{Re\lambda \to \infty} \int_0^t T_\lambda(s)A_\lambda x \, ds = \int_0^t T(t)Ax \, ds$$

quels que soient $x \in \mathcal{D}(A)$ et $t \geq 0$.
Soit B le générateur infinitésimal du C_0-semigroupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors:

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t T(s)Ax\, ds = Ax$$

et nous voyons que $x \in \mathcal{D}(B)$. Par conséquent $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$ et $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$.
D'autre part, nous avons l'inégalité:

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Si $\lambda \in \Lambda_\omega$, alors $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Soit $x \in \mathcal{D}(B)$, on a donc $(\lambda I - B)\,x \in \mathcal{E}$ et comme l'opérateur $\lambda I - A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{E}$ est bijectif, il existe $x' \in \mathcal{D}(A)$ tel que $(\lambda I - A)\,x' = (\lambda I - B)\,x$. Puisque $B|_{\mathcal{D}(A)} = A$, il vient que $(\lambda I - B)\,x' = (\lambda I - B)\,x$ et comme $\lambda \in \rho(B)$, il en résulte que $x' = x$. Par suite $x \in \mathcal{D}(A)$ et donc $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$.
Finalement on voit que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ et $A = B$.
Nous avons montré donc que A est le générateur infinitésimal du C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et compte tenu du théorème de l'unicité de l'engendrement, il résulte que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est l'unique C_0-semi-groupe engendré par A.■

Corollaire 2.3.12 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ *, A son générateur infinitésimal et* $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors:*

$$T(t)x = \lim_{Re\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda} x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$.

Preuve Elle résulte du théorème de Hille-Yosida.■

Dans la suite nous noterons par $\mathcal{GI}(\mathcal{E})$ l'ensemble des opérateurs linéaires qui sont des générateurs infinitésimaux de C_0-semi-groupes sur l'espace de Banach $\mathcal{E}$. De même, pour $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$, nous noterons par $\mathcal{GI}(M, \omega)$ l'ensemble des générateurs infinitésimaux $A \in \mathcal{GI}(\mathcal{E})$ pour lesquels:

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n} \quad (\forall)\lambda \in \Lambda_\omega \text{ et } n \in \mathbf{N}^*.$$

2.4 La représentation de Bromwich

Dans la section 1.3, avec le théorème 1.3.12 nous avons vu que pour les semi-groupes uniformément continus on peut obtenir une représentation par la transformée de Laplace inverse. Dans ce paragraphe nous montrerons qu'il existe une représentation du même type pour les C_0-semi-groupes. Nous commençons avec quelques propriétés sur l'approximation généralisée de Yosida.

Lemme 2.4.1 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *, A son générateur infinitésimal et* $\{A_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Alors pour tout* $\mu \in \Lambda_\omega$*, il existe* $\Omega > \omega$ *tel que* $\Lambda_\Omega \subset \rho(A_\mu)$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda_\Omega$ *on a:*

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \Omega} \quad .$$

De plus, pour $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $C > 0$ *(qui dépend de M et ε) tel que:*

$$\|R(\lambda; A_\mu)x\| \leq \frac{C}{|\lambda|}(\|x\| + \|Ax\|) \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$*, avec* $Re\lambda > \Omega + \varepsilon$ *et* $Re\mu > \omega + \frac{|\mu|}{2}$*.*

Preuve Soit $\mu \in \Lambda_\omega$ arbitrairement fixé. Nous avons vu que A_μ est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\mu}\right\}_{t\geq 0}$. En ce cas, nous avons:

$$\left\|e^{tA_\mu}\right\| \leq Me^{\frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu - \omega}t} \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Si nous notons:

$$\Omega = \frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu - \omega} \quad ,$$

alors il est clair que:

$$\Omega = \omega + \frac{\omega^2 + Im^2\mu}{Re\mu - \omega} > \omega$$

et que $\Lambda_\Omega = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\mathrm{Re}\lambda > \Omega\} \subset \rho(A_\mu)$. De plus, pour tout $\lambda \in \Lambda_\Omega$, nous avons:

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \Omega} \quad .$$

Si nous considérons $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $Re\lambda > \Omega + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, alors on voit que:

$$\|R(\lambda; A_\mu)\| \leq \frac{M}{\varepsilon} \quad .$$

D'autre part, pour $x \in \mathcal{D}(A)$ et $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $Re\mu > \omega + \frac{|\mu|}{2}$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} &\|A_\mu x\| = \|\mu R(\mu;A)Ax\| \leq |\mu|\|R(\mu;A)\|\|Ax\| \leq \\ \leq\ &|\mu|\frac{M}{Re\mu - \omega}\|Ax\| \leq 2M\|Ax\| \quad . \end{aligned}$$

De l'égalité:

$$(\lambda I - A_\mu)R(\lambda;A_\mu) = I \quad ,$$

il vient:

$$R(\lambda;A_\mu) = \frac{1}{\lambda}I + \frac{1}{\lambda}R(\lambda;A_\mu)A_\mu$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} \|R(\lambda;A_\mu)x\| &\leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\|x\| + \|R(\lambda;A_\mu)\|\|A_\mu x\|\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\left(\|x\| + \frac{2M^2}{\varepsilon}\|Ax\|\right) \leq \\ &\leq \frac{C}{|\lambda|}\left(\|x\| + \|Ax\|\right) \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A), \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de M et de ε.$\blacksquare$

Lemme 2.4.2 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *, A son générateur infinitésimal,* $\{A_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\omega}$ *l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A et $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $Re\lambda > \omega + \varepsilon$, arbitrairement fixé pour $\varepsilon > 0$. Alors:*

$$\lim_{Re\mu\to\infty} R(\lambda;A_\mu)x = R(\lambda;A)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à $Im\lambda \in [-k,k]$, où $k > 0$.

Preuve Compte tenu du lemme 2.4.1, pour $\mu \in \Lambda_\omega$, il existe $\Omega > \omega$ tel que $\Lambda_\Omega \subset \rho(A_\mu)$. Nous avons:

$$\Omega = \frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu - \omega} \quad .$$

Donc l'inégalité $Re\lambda > \Omega$ est équivalente avec:

$$Re\lambda > \omega + \frac{\omega^2 + Im\mu}{Re\mu - \omega} \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $\frac{\omega^2+Im\mu}{Re\mu-\omega} < \varepsilon$, alors $Re\lambda > \omega + \varepsilon$ implique $Re\lambda > \Omega$. Par suite, $\lambda \in \rho(A_\mu)$. Donc il existe $R(\lambda;A_\mu)$ et avec le lemme 2.4.1 on voit que:

$$\|R(\lambda;A_\mu)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega} \quad .$$

D'autre part, nous avons:

$$\begin{aligned}
Re\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} &= Re\left(\lambda - \frac{\lambda^2}{\lambda+\mu}\right) = Re\lambda - Re\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} > \\
&> \omega + \varepsilon - Re\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} \quad .
\end{aligned}$$

Etant donné $k > 0$ tel que $|Im\lambda| \leq k$, il existe $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $Re\frac{\lambda^2}{\lambda+\mu} < \frac{\varepsilon}{2}$. Il s'ensuit que $Re\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} > \omega + \frac{\varepsilon}{2}$. Par conséquent, $\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \in \rho(A)$ et donc $R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)$ existe bien. Nous avons:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda+\mu}(\lambda I - A_\mu)(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = \\
= &\frac{1}{\lambda+\mu}\left[\lambda I - \mu^2 R(\mu; A) + \mu I\right](\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = \\
= &\left(\mu I - A - \frac{\mu^2}{\lambda+\mu} I\right) R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = \\
= &\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} I - A\right) R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) = I \quad .
\end{aligned}$$

Par un calcul analogue, on peut obtenir:

$$\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)(\lambda I - A_\mu) = I \quad .$$

Il s'ensuit que:

$$R(\lambda; A_\mu) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) \quad .$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
&R(\lambda; A_\mu) - R(\lambda; A) = \frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) - R(\lambda; A) = \\
= &\frac{1}{\lambda+\mu}\left[(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) - (\lambda+\mu)R(\lambda; A)\right] = \\
= &\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\Bigg[(\mu I - A)(\lambda I - A) - \\
- &(\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} I - A\right)\Bigg] R(\mu; A)R(\lambda; A) = \\
= &\frac{1}{\lambda+\mu}(\mu I - A)R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) A^2 R(\mu; A)R(\lambda; A) = \\
= &\frac{1}{\lambda+\mu}R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right) R(\lambda; A)A^2 \quad .
\end{aligned}$$

Mais:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{\varepsilon}$$

et:

$$\left\| R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right\| \leq \frac{2M}{\varepsilon} \quad .$$

Si $x \in \mathcal{D}(A^2)$, alors on voit que:

$$\begin{aligned} & \|R(\lambda; A_\mu)x - R(\lambda; A)x\| \leq \\ \leq \; & \frac{1}{|\lambda+\mu|}\left\| R\left(\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}; A\right)\right\| \|R(\lambda; A)\| \|A^2x\| \leq \\ \leq \; & \frac{1}{|\mu|}\frac{2M}{\varepsilon}\frac{M}{\varepsilon}\|A^2x\| \leq \frac{1}{Re\mu}\frac{2M^2}{\varepsilon^2}\|A^2x\| \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que:

$$\lim_{Re\mu\to\infty} R(\lambda; A_\mu)x = R(\lambda; A)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A^2),$$

uniformément par rapport à $Im\lambda \in [-k, k]$, où $k > 0$. Avec le théorème 2.2.10, on sait que $\overline{\mathcal{D}(A^2)} = \mathcal{E}$. Comme $R(\lambda; A)$ et $R(\lambda; A_\mu)$ sont uniformément bornés, on obtient:

$$\lim_{Re\mu\to\infty} R(\lambda; A_\mu)x = R(\lambda; A)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à $Im\lambda \in [-k, k]$, où $k > 0$.■

Théorème 2.4.3 *Soit A le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et $\lambda \in \Lambda_\omega$. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ on a:*

$$\int_0^t T(s)x\, ds = \int_{Re\lambda-i\infty}^{Re\lambda-i\infty} e^{zt}R(z; A)x\, \frac{dz}{z}$$

et l'intégrale de la partie droite de l'égalité est uniformément convergente par rapport à t sur les intervalles compacts de $]0, \infty)$.

Preuve Soit $\{A_\mu\}_{\mu\in\Lambda_\omega}$ l'approximation généralisée de Yosida de l'opérateur A. Soit $\mu \in \Lambda_\omega$ tel que $Re\,\mu > \omega + \frac{|\mu|}{2}$. Avec le lemme 2.4.1, nous déduissons qu'il existe $\Omega = \frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu - \omega} > \omega$ tel que $\Lambda_\Omega = \{\lambda \in \mathbf{C} | Re\,\lambda > \Omega\} \subset \rho(A_\mu)$. Soit $\lambda \in \Lambda_\Omega$. En utilisant le théorème 1.3.12, pour $R > 2Re\,\lambda$ on peut considérer le contour de Jordan A_μ-spectral

$$\Gamma_R^1 = \Gamma_R^{1'} \cup \Gamma_R^{1''} \quad ,$$

où

$$\Gamma_R^{1'} = \{Re\,\lambda + i\tau | \tau \in [-R, R]\}$$

et

$$\Gamma_R^{1''} = \left\{ Re\,\lambda + R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \middle| \varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right\} \quad .$$

Pour le semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_\mu}\right\}_{t\geq 0}$ engendré par A_μ il en résulte:

$$e^{tA_\mu} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} e^{zt} R(z; A_\mu)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - i\infty}^{Re\,\lambda + i\infty} e^{zt} R(z; A_\mu)\, dz \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$. Pour $R > 2Re\,\lambda$ et $x \in \mathcal{D}(A)$ nous notons

$$I_R(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} e^{zs} R(z; A_\mu) x\, dz \quad .$$

Soient $0 < a < b$. Pour tout $t \in [a, b]$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} \int_0^t I_R(s)\, ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} e^{zs} R(z; A_\mu) x\, dz\, ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} \int_0^t e^{zs}\, ds R(z; A_\mu) x\, dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} e^{zt} R(z; A_\mu) x\, \frac{dz}{z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} R(z; A_\mu) x\, \frac{dz}{z} \quad . \end{aligned}$$

Montrons que pour l'intégrale

$$I(R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} R(z; A_\mu) x\, \frac{dz}{z} \quad ,$$

on a

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = 0 \quad .$$

Soit le contour de Jordan lisse et fermé

$$\Gamma_R^2 = \Gamma_R^{2'} \cup \Gamma_R^{2''} \quad ,$$

où

$$\Gamma_R^{2'} = \{Re\,\lambda + i\tau | \tau \in [-R, R]\}$$

et

$$\Gamma_R^{2"} = \left\{ Re\,\lambda + R(\cos\varphi + i\sin\varphi) \,\middle|\, \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \right\} \quad .$$

Avec le théorème de Cauchy ([**DS'67**, pag. 225]), on voit que

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R^2} R(z; A_\mu)x \,\frac{dz}{z} = 0 \quad ,$$

ou bien

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R^{2'}} R(z; A_\mu)x \,\frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R^{2"}} R(z; A_\mu)x \,\frac{dz}{z} = 0 \quad .$$

Soit $z \in \Gamma^{2"}$. Compte tenu du lemme 2.4.1, il existe $C > 0$ tel que

$$\|R(z; A_\mu)x\| \le \frac{C}{|z|}\left(\|x\| + \|Ax\|\right) \quad .$$

De plus, pour $z \in {\Gamma^{2"}}_R$ on a:

$$\begin{aligned} |z| &= |Re\,\lambda + R(\cos\varphi + isin\varphi)| = |Re\,\lambda - [-R(\cos\varphi + i\sin\varphi)]| \ge \\ &\ge \big|\,|Re\,\lambda| - |-R(\cos\varphi + i\sin\varphi)|\,\big| = |Re\,\lambda - R| = R - Re\,\lambda \quad , \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$\frac{1}{|z|} \le \frac{1}{R - Re\,\lambda} \quad .$$

Par conséquent, on a:

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R^{2"}} R(z; A_\mu)x \,\frac{dz}{z} \right\| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R^{2"}} \|R(z; A_\mu)x\| \,\frac{|dz|}{|z|} \le \\ \le\ & \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R^{2"}} \frac{C}{|z|}(\|x\| + \|Ax\|)\frac{1}{|z|}|dz| \le \frac{C}{2\pi}\frac{\|x\| + \|Ax\|}{(R - Re\,\lambda)^2} \int\limits_{\Gamma_R^{2"}} |dz| = \\ =\ & \frac{C}{2}\frac{R}{(R - Re\,\lambda)^2}(\|x\| + \|Ax\|) \quad . \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R^{2"}} R(z; A_\mu)x \,\frac{dz}{z} = 0 \quad .$$

Par suite, on a:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R^{2'}} R(z; A_\mu)x \,\frac{dz}{z} = 0$$

ou bien

$$\lim_{R\to\infty} I(R) = 0 \quad .$$

Alors nous avons:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^t I_R(s)\, ds = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - iR}^{Re\,\lambda + iR} e^{zt} R(z; A_\mu)x \, \frac{dz}{z}$$

d'où

$$\int_0^t I_R(s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - i\infty}^{Re\,\lambda + i\infty} e^{zt} R(z; A_\mu)x \, \frac{dz}{z} \quad .$$

Avec le corollaire 2.3.12 et le lemme 2.4.2, on obtient:

$$\begin{aligned}
\int_0^t T(s)x\, ds &= \lim_{Re\mu\to\infty} \int_0^t e^{sA_\mu} x\, ds = \\
&= \lim_{Re\mu\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - i\infty}^{Re\,\lambda + i\infty} e^{zt} R(z; A_\mu)x \, \frac{dz}{z} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\,\lambda - i\infty}^{Re\,\lambda + i\infty} e^{zt} R(z; A)x \, \frac{dz}{z}
\end{aligned}$$

et comme:

$$\lim_{Re\mu\to\infty} \Omega = \lim_{Re\mu\to\infty} \frac{\omega Re\mu + Im^2\mu}{Re\mu - \omega} = \omega \quad ,$$

nous obtenons le résultat désiré.■

Théorème 2.4.4 (Bromwich) *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ *et* $\lambda \in \Lambda_\omega$. *Alors:*

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\lambda - i\infty}^{Re\lambda + i\infty} e^{zt} R(z; A)x\, dz \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A^2)$$

et pour tout $\delta > 0$, *l'intégrale est uniformément convergente par rapport à* $t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right]$.

Preuve Si $x \in \mathcal{D}(A^2)$, alors $Ax \in \mathcal{D}(A)$. Compte tenu du théorème 2.4.3, on voit que:

$$\int_0^t T(s)Ax\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\lambda - i\infty}^{Re\lambda + i\infty} e^{zt} R(z; A)Ax \, \frac{dz}{z} \quad .$$

D'où il résulte que:

$$T(s)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Re\lambda - i\infty}^{Re\lambda + i\infty} e^{zt} R(z;A)Ax \,\frac{dz}{z} \quad .$$

De l'égalité:

$$R(z;A)(zI - A) = I \quad ,$$

nous déduisons:

$$\frac{1}{z}R(z;A)A = R(z;A) - \frac{1}{z}I$$

et par suite:

$$T(s)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Re\lambda - i\infty}^{Re\lambda + i\infty} e^{zt} R(z;A)x \,dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Re\lambda - i\infty}^{Re\lambda + i\infty} e^{zt} x \,\frac{dz}{z} \quad .$$

Compte tenu que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{Re\lambda - i\infty}^{Re\lambda + i\infty} e^{zt} x \,\frac{dz}{z} = x$$

et que pour tout $\delta > 0$, l'intégrale est uniformément convergente par rapport à $t \in \left[\delta, \frac{1}{\delta}\right]$, nous obtenons l'égalité de l'énoncé.■

2.5 Conditions suffisantes d'appartenances à $\mathcal{GI}(M,0)$

Nous présentons dans la suite deux conditions suffisantes pour qu'un opérateur soit le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe uniformément borné.

Théorème 2.5.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé défini sur un sous espace dense de $\mathcal{E}$ et vérifiant les propriétés suivantes:*
i) il existe $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que:

$$\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \left\{\lambda \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\};$$

ii) il existe une constante $K > 1$ tel que:

$$\|R(\lambda;A)\| \le \frac{K}{|\lambda|} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Sigma_\delta - \{0\}.$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ pour lequel il existe $M > 1$ tel que $\|T(t)\| \leq M$, pour tout $t \geq 0$.
De plus, pour tout $\nu \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\delta\right[$ et $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^{(1)} \cup \Gamma_\nu^{(2)}$, où:

$$\Gamma_\nu^{(1)} = \{\, r(\cos\nu - i\sin\nu) |\; r \in [0,\infty)\}$$

et:

$$\Gamma_\nu^{(2)} = \{\, r(\cos\nu + i\sin\nu) |\; r \in [0,\infty)\} \quad ,$$

on a:

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{zt}R(z;A)\, dz$$

et l'intégrale est uniformément convergente par rapport à $t > 0$.

Preuve Soit $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $\nu \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\delta\right[$ considérons le chemin d'intégration $\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^{(1)} \cup \Gamma_\nu^{(2)}$, où:

$$\Gamma_\nu^{(1)} = \{\, r(\cos\nu - i\sin\nu) |\; r \in [0,\infty)\}$$

et:

$$\Gamma_\nu^{(2)} = \{\, r(\cos\nu + i\sin\nu) |\; r \in [0,\infty)\} \quad .$$

Soit:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{zt}R(z;A)\, dz \quad .$$

Compte tenu du (ii), on voit que l'intégrale est uniformément convergente par rapport à $t > 0$. Pour $R > 0$, nous définissons le contour de Jordan lisse et fermé $\Gamma_\nu = \Gamma_{R,\nu}^{(1)} \cup \Gamma_{R,\nu}^{(2)} \cup \Gamma_{R,\nu}^{(3)}$ où

$$\Gamma_{R,\nu}^{(1)} = \{\, r(\cos\nu - i\sin\nu) |\; r \in [0,R]\} \quad ,$$

$$\Gamma_{R,\nu}^{(2)} = \{\, R(\cos\nu + i\sin\nu) |\; \theta \in [-\nu,\nu]\} \quad ,$$

et

$$\Gamma_{R,\nu}^{(3)} = \{\, r(\cos\nu + i\sin\nu) |\; r \in [0,R]\} \quad .$$

D'aprés le théorème de Cauchy ([**DS'67**, pag. 225]), on a

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\nu}} e^{zt}R(z;A)\, dz = 0 \quad .$$

Par conséquent, on peut changer le chemin d'intégration Γ_ν par $\Gamma_t = \Gamma_t^{(1)} \cup \Gamma_t^{(2)} \cup \Gamma_t^{(3)}$ où

$$\Gamma_t^{(1)} = \left\{ r(\cos\nu - i\sin\nu) \,\middle|\, r \in \left[\frac{1}{t}, \infty\right) \right\} \quad ,$$

$$\Gamma_t^{(2)} = \left\{ \frac{1}{t}(\cos\theta + i\sin\theta) \mid \theta \in [-\nu, \nu] \right\}$$

et

$$\Gamma_t^{(3)} = \left\{ r(\cos\nu + i\sin\nu) \,\middle|\, r \in \left[\frac{1}{t}, \infty\right) \right\} \quad .$$

Alors:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t^{(1)}} e^{zt} R(z;A)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t^{(2)}} e^{zt} R(z;A)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t^{(3)}} e^{zt} R(z;A)\, dz$$

et si nous notons

$$U_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t^{(1)}} e^{zt} R(z;A)\, dz \quad ,$$

$$U_2(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t^{(2)}} e^{zt} R(z;A)\, dz$$

et

$$U_3(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t^{(3)}} e^{zt} R(z;A)\, dz \quad ,$$

il vient:

$$\|U(t)\| \leq \|U_1(t)\| + \|U_2(t)\| + \|U_3(t)\| \quad .$$

Comme $\nu \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta\right[$, on en déduit que $\cos\nu < 0$. Avec le changement de variable

$$z = r(\cos\nu - i\sin\nu) \quad , \quad r \in \left[\frac{1}{t}, \infty\right),$$

nous avons:

$$\|U_1(t)\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_t^{(1)}} e^{zt} R(z;A)\, dz \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{rt(\cos\nu - i\sin\nu)} R(r(\cos\nu - i\sin\nu); A)(\cos\nu - isin\nu)\, dr \right\| \leq$$

$$\leq \frac{K}{2\pi} \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{rt\cos\nu} \frac{K}{r}\, dr = \frac{K}{2\pi} \int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{-rt(-\cos\nu)} \frac{1}{r}\, dr \quad .$$

Pour

$$s = rt(-\cos\nu) \quad , \quad s \in [-\cos\nu, \infty),$$

il vient $ds = -t\cos\nu dr$. Donc:

$$\begin{aligned}
\|U_1(t)\| &\leq \frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\cos\nu}^{\infty} e^{-s}\frac{-t\cos\nu}{s}\frac{1}{-t\cos\nu}\,ds = \frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\cos\nu}^{\infty}\frac{e^{-s}}{s}\,ds \leq \\
&\leq \frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\cos\nu}^{\infty}\frac{1}{s^2}\,ds = \frac{K}{2\pi}\left(\frac{1}{-\cos\nu}\right) = M' \quad .
\end{aligned}$$

De façon analogue, nous obtenons:

$$\|U_3(t)\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_t^{(3)}} e^{zt}R(z;A)\,dz\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{rt(\cos\nu + i\sin\nu)}R(r(\cos\nu + i\sin\nu);A)(\cos\nu + isin\nu)\,dr\right\| \leq$$

$$\leq \frac{K}{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{t}}^{\infty} e^{rt\cos\nu}\frac{K}{r}\,dr \leq M' \quad .$$

De même, pour l'intégrale $U_2(t)$, avec le changement de variable

$$z = \frac{1}{t}(\cos\theta + i\sin\theta) \quad , \quad \theta \in [-\nu, \nu],$$

on a

$$dz = \frac{1}{t}(-\sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta$$

et

$$\|U_2(t)\| = \left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_t^{(2)}} e^{zt}R(z;A)\,dz\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\nu}^{\nu} e^{t\frac{1}{t}(\cos\theta + i\sin\theta)}R\left(\frac{1}{t}(\cos\theta + i\sin\theta);A\right)\frac{1}{t}(-sin\theta + i\cos\theta)\,d\theta\right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\nu}^{\nu} e^{\cos\theta}\frac{K}{\frac{1}{t}}\frac{1}{t}\,d\theta = \frac{K}{2\pi}\int\limits_{-\nu}^{\nu} e^{\cos\theta}\,d\theta \leq \frac{Ke}{2\pi}\int\limits_{-\nu}^{\nu}\,d\theta = M" \quad .$$

Par conséquent, il existe $M \geq 1$ tel que:

$$\|U(t)\| \leq M \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Nous allons maintenant montrer que pour tout $\lambda \in \Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbf{C}\,|\mathrm{Re}\lambda > 0\}$, on a:

$$R(\lambda; A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\, dt \quad .$$

Nous avons successivement:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau e^{-\lambda t} U(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\tau \int_{\Gamma_\nu} e^{-(\lambda - z)t} R(z; A)\, dz dt = \\
= \;& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \int_0^\tau e^{(z-\lambda)t}\, dt R(z; A)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \frac{e^{(z-\lambda)\tau} - 1}{z - \lambda} R(z; A)\, dz = \\
= \;& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \frac{e^{(z-\lambda)\tau}}{z - \lambda} R(z; A)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \frac{R(z; A)}{\lambda - z}\, dz = \\
= \;& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \frac{e^{(z-\lambda)\tau}}{z - \lambda} R(z; A)\, dz + (\lambda I - A)^{-1} = \\
= \;& \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \frac{e^{(z-\lambda)\tau}}{z - \lambda} R(z; A)\, dz + R(\lambda; A) \quad .
\end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\tau e^{-\lambda t} U(t)\, dt - R(\lambda; A) \right\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} \frac{e^{(z-\lambda)\tau}}{z - \lambda} R(z; A)\, dz \right\| \le \\
\le \;& \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\nu} \frac{|e^{(z-\lambda)\tau}|}{|z - \lambda|} \|R(z; A)\|\, |dz| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\nu} \frac{e^{(Rez - Re\lambda)\tau}}{|z - \lambda|} \frac{K}{|z|} |dz| = \\
= \;& \frac{K}{2\pi} e^{-\tau Re\lambda} \int_{\Gamma_\nu} e^{\tau Re} \frac{1}{|z - \lambda|} \frac{1}{|z|} |dz| \quad .
\end{aligned}$$

Soit

$$C_\tau = \frac{K}{2\pi} \int_{\Gamma_\nu} e^{\tau Rez} \frac{|dz|}{|z||z - \lambda|} \quad .$$

Pour $z \in \Gamma_\nu$ on a $|z| = r$ et

$$|z - \lambda| \ge |\,|z| - |\lambda|\,| = |r - |\lambda|\,| \quad .$$

Donc:

$$C_\tau \le \frac{K}{2\pi} \int_0^\infty e^{\tau Rez} \frac{1}{|r - |\lambda||} \frac{1}{r}\, dr = \frac{K}{2\pi} e^{\tau Rez} \int_0^\infty \frac{1}{r|r - |\lambda||}\, dr < \infty \quad .$$

Si nous notons

$$C = \sup_{\tau \geq 0} C_\tau \quad ,$$

alors nous obtenons:

$$\left\| \int_0^\tau e^{-\lambda t} U(t)\, dt - R(\lambda; A) \right\| \leq C e^{-\tau Re\lambda} \quad .$$

En passant à limite pour $\tau \to \infty$, on obtient

$$R(\lambda; A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t)\, dt$$

pour tout $\lambda \in \Lambda_0$. Comme $\|U(t)\| \leq M$, pour tout $t \geq 0$, par récurrence on peut obtenir:

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda; A) = (-1)^{n-1} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} U(t)\, dt \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Mais avec la proposition 1.1.16 (iii), on voit que:

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda; A) = (-1)^{n-1} (n-1)! R(\lambda; A)^n \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Par conséquent, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \|R(\lambda; A)^n\| &= \left\| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} U(t)\, dt \right\| \leq \\ &\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-Re\lambda t}\, dt = \\ &= \frac{M}{(n-1)!} \frac{n-1}{Re\lambda} \int_0^\infty t^{n-2} e^{-Re\lambda t}\, dt = \cdots = \frac{M}{(Re\lambda)^n} \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Avec le théorème de Hille-Yosida, on voit que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, 0)$.

Soit $x \in \mathcal{D}(A^2)$ et $\lambda \in \Lambda_0$. Compte tenu du théorème 2.4.4, nous avons:

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{Re\lambda - i\infty}^{Re\lambda + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda; A) x\, d\lambda$$

et compte tenu du (ii) et du théorème de Cauchy, on peut remplacer le contour d'intégration par Γ_ν. Donc:

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} R(\lambda; A) x\, d\lambda \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A^2).$$

Comme $\overline{\mathcal{D}(A^2)} = \mathcal{E}$ et l'intégrale $\int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda$ est uniformément convergente, nous obtenons:

$$T(t)x = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\nu} e^{\lambda t} R(\lambda; A)x \, d\lambda \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte l'affirmation de l'énoncé.■

Théorème 2.5.2 *Soit A un opérateur linéaire fermé défini sur un sous espace dense de $\mathcal{E}$ et vérifiant les propriétés suivantes:*
i) $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbf{C} | Re z \leq 0\}$;
ii) pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $x^* \in \mathcal{E}^*$ on a:

$$\sup_{\gamma > 0} \gamma \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \left| \left\langle R(\lambda; A)^2 x, x^* \right\rangle \right| |d\lambda| < \infty \quad .$$

Alors A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, 0)$.

Preuve Pour $\gamma > 0$ arbitrairement fixé, l'application:

$$\{z \in \mathbf{C} | Re z > 0\} \ni z \longmapsto \left\langle R(z + \gamma; A)^2 x, x^* \right\rangle \in \mathbf{C}$$

se trouve dans l'espace de Hardy H^1. Par conséquent elle admet un représentation par une intégrale de Cauchy et en particulier pour $\alpha > 0$ et $\gamma \in]0, \alpha[$, on a:

$$\left\langle R(\alpha; A)^2 x, x^* \right\rangle = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\langle R(\lambda; A)^2 x, x^* \rangle}{\alpha - \lambda} \, d\lambda \quad .$$

De plus, par récurrence on voit que:

$$\left\langle \frac{d^n}{d\alpha^n} R(\alpha; A)^2 x, x^* \right\rangle = (-1)^n \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\langle R(\lambda; A)^2 x, x^* \rangle}{(\alpha - \lambda)^{n+1}} \, d\lambda \quad ,$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. D'autre part, avec la proposition 1.1.16 (iii) il vient:

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} R(\alpha; A) = (-1)^n n! R(\alpha; A)^{n+1} \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*$$

Par itération nous obtenons:

$$\left\langle R(\alpha; A)^{n+1} x, x^* \right\rangle = \frac{1}{2n\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{\langle R(\lambda; A)^2 x, x^* \rangle}{(\alpha - \lambda)^n} \, d\lambda \quad ,$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $\gamma \in]0,\alpha[$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a:

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle R(\alpha;A)^{n+1}x, x^*\right\rangle\right| \le \\
\le\ & \frac{1}{2n\pi}\frac{1}{(\alpha-\gamma)^n}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\left|\left\langle R(\lambda;A)^2x,x^*\right\rangle\right|\,|d\lambda| \le \\
\le\ & \frac{1}{2n\pi}\frac{C}{\gamma}\frac{1}{(\alpha-\gamma)^n} \quad , \quad (\forall)\gamma \in]0,\alpha[,
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que de $x \in \mathcal{E}$ et de $x^* \in \mathcal{E}^*$. Si nous prenons:

$$\gamma = \frac{\alpha}{n+1} \quad ,$$

alors on voit que:

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle R(\alpha;A)^{n+1}x, x^*\right\rangle\right| \le \frac{1}{2n\pi}\frac{C}{\frac{\alpha}{n+1}}\frac{1}{\left(\alpha-\frac{\alpha}{n+1}\right)^n} = \\
=\ & \frac{C}{2\pi}\frac{1}{\alpha^{n+1}}\frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{C}{\pi}\frac{1}{\alpha^{n+1}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} \le \\
\le\ & \frac{Ce}{\pi}\frac{1}{\alpha^{n+1}} \quad .
\end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Banach-Steinhaus ([**DS'67**, Theorem II.1.11, pag. 52]), on obtient pour tout $\alpha > 0$:

$$\|R(\alpha;A)^m\| \le \frac{M}{\alpha^m} \quad , \quad (\forall)m \in \{2,3,\ldots\}.$$

Prouvons que cette inégalité reste valable pour $m = 1$. On a:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\alpha}^{\beta} R(\tau;A)^2\,d\tau = -\int\limits_{\beta}^{\alpha} R(\tau;A)^2\,d\tau = \\
=\ & \int\limits_{\beta}^{\alpha}\frac{d}{d\tau}R(\tau;A)\,d\tau = R(\alpha;A)-R(\beta;A) \quad , \quad (\forall)\alpha,\beta > 0.
\end{aligned}$$

Comme pour $m = 2$ nous avons:

$$\left\|R(\beta;A)^2\right\| \le \frac{M}{\beta^2} \quad ,$$

on en déduit que la limite existe et on pose

$$R_0x := \lim_{\beta\to\infty} R(\beta;A)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

D'autre part, si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$R(\beta; A)x = R(\beta; A)^2(\beta I - A)x \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \beta \to \infty.$$

Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$, il s'ensuit que $R_0 = 0$ et on voit que:

$$R(\alpha; A) = \int_{\alpha}^{\infty} R(\tau; A)^2 \, d\tau \quad .$$

Par conséquent:

$$\|R(\alpha; A)^m\| \leq \frac{M}{\alpha^m} \quad , \quad (\forall) m \in \mathbf{N}^*.$$

En appliquant le théorème de Hille-Yosida, on obtient le résultat désiré.■

2.6 Propriétés spectrales des C_0-semi-groupes

Nous terminons ce chapitre avec quelques propriétés spectrales pour les C_0-semi-groupes.

Lemme 2.6.1 *Soient $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $t > 0$, l'application:*

$$B_\lambda(t) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds$$

définit un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes:

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}$$

et:

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

De plus $B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t)$.

Preuve Pour tout $x \in \mathcal{E}$ nous avons successivement:

$$\begin{aligned}
\|B_\lambda(t)x\| &= \left\| \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds \right\| \leq \int_0^t e^{Re\lambda(t-s)} \|T(s)\| \|x\|\, ds \leq \\
&\leq Me^{Re\lambda t}\|x\| \int_0^t e^{-(Re\lambda-\omega)s}\, ds < \infty \quad .
\end{aligned}$$

Comme la linéarité est évidente, il en résulte que $B_\lambda(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, quels que soient $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $t > 0$.

Si $x \in \mathcal{E}$ et $h > 0$, alors nous obtenons:

$$\begin{aligned}
& \frac{T(h)-I}{h} B_\lambda(t)x = \frac{T(h)-I}{h} \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds = \\
= \;& \frac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(h+s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds = \\
= \;& \frac{1}{h}\int_h^{t+h} e^{\lambda(t-\tau+h)} T(\tau)x\, d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds = \\
= \;& \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds = \\
= \;& \frac{e^{\lambda h}}{h}\left[\int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau - \int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau\right] - \\
- \;& \frac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds = \\
= \;& \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau + \\
+ \;& \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds - \\
- \;& \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau = \\
= \;& \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau + \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x\, ds - \\
- \;& \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{\lambda(t-\tau)} T(\tau)x\, d\tau =
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_t^{t+h} e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)x\,d\tau + \frac{e^{\lambda h}-1}{h}B_\lambda(t)x - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{\lambda(t-\tau)}T(\tau)x\,d\tau \quad .$$

En passant à limite, on a:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(h)B_\lambda(t)x - B_\lambda(t)x}{h} = T(t)x + \lambda B_\lambda(t)x - e^{\lambda t}x \quad ,$$

d'où $B_\lambda(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et:

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Si $x \in \mathcal{D}(A)$, alors nous avons:

$$B_\lambda(t)Ax = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)Ax\,ds =$$

$$= \int_0^t e^{\lambda(t-s)}\frac{d}{ds}T(s)x\,ds = T(t)x - e^{\lambda t}x + \lambda B_\lambda(t)x \quad ,$$

d'où l'on tire:

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

De plus, nous obtenons que:

$$B_\lambda(t)\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(A)$$

et:

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = B_\lambda(t)(\lambda I - A)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A) \quad ,$$

d'où:

$$AB_\lambda(t)x = B_\lambda(t)Ax \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Compte tenu du théorème 2.2.9, on voit que:

$$B_\lambda(t)T(t) = T(t)B_\lambda(t) \quad , \quad (\forall)t \geq 0.\blacksquare$$

Théorème 2.6.2 (spectral mapping) *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors:*

$$e^{t\sigma(A)} = \left\{ e^{\lambda t} \middle| \, \lambda \in \sigma(A) \right\} \subseteq \sigma(T(t)) \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Preuve Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $e^{\lambda t} \in \rho(T(t))$.
Alors on peut considérer l'opérateur $Q = \left(e^{\lambda t} I - T(t)\right)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. Compte tenu du lemme 2.6.1 (i), on a:

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et:

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Par multiplication avec Q à droite dans la première égalité et à gauche dans la seconde, nous obtenons:

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)Qx = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et:

$$QB_\lambda(t)(\lambda I - A)x = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Mais, avec le lemme 2.6.1, il en résulte que:

$$\left(e^{\lambda t} I - T(t)\right) B_\lambda(t) = B_\lambda(t) \left(e^{\lambda t} I - T(t)\right) \quad ,$$

et nous voyons que $QB_\lambda(t) = B_\lambda(t)Q$. Par conséquent:

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)Qx = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et:

$$B_\lambda(t)Q(\lambda I - A)x = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Il s'ensuit que $\lambda \in \rho(A)$ et finalement on voit que:

$$\rho(T(t)) \subset e^{t\rho(A)} \quad , \quad (\forall)t \geq 0,$$

ou bien:

$$e^{t\sigma(A)} \subseteq \sigma(T(t)) \quad , \quad (\forall)t \geq 0.\blacksquare$$

Remarque 2.6.3 Nous avons vu que pour les semi-groupes uniformément continus on a l'égalité:

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)) \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Mais il existe des C_0-semi-groupes pour lesquels l'inclusion du théorème 2.6.2 est stricte.

Définition 2.6.4 *On dit que le C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est nilpotent s'il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t) = 0$, pour tout $t > t_0$.*

Proposition 2.6.5 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ un semi-groupe nilpotent et A son générateur infinitésimal. Alors $\sigma(A) = \emptyset$.*

Preuve Comme le C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est nilpotent, il existe $t_0 > 0$ tel que $T(t) = 0$, $(\forall) t > t_0$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $x \in \mathcal{E}$, on a:

$$\left\| e^{-\lambda t} T(t)x \right\| \leq e^{-Re\lambda t} M e^{\omega t} \|x\| \quad , \quad (\forall) t \in [0, t_0]$$

et comme:

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt = 0 \quad ,$$

on peut définir la transformée de Laplace:

$$R_\lambda : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$R_\lambda x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt = \int_0^{t_0} e^{-\lambda t} T(t)x \, dt$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. Avec le théorème 2.3.1, il vient $\lambda \in \rho(A)$ et $R_\lambda x = R(\lambda; A)x$, pour tout $x \in \mathcal{E}$. Donc $\rho(A) = \mathbf{C}$, c'est-à-dire $\sigma(A) = \emptyset$.■

Remarque 2.6.6 Pour un semi-groupe nilpotent $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur A, l'inclusion du théorème 2.6.2 est stricte.

Théorème 2.6.7 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ et A son générateur infinitésimal. Alors:*

$$\sigma(R(\lambda; A)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \middle| \zeta \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\}$$

quel que soit $\lambda \in \Lambda_\omega$.

Preuve Soient $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\mu \in \rho(A)$, $\mu \neq \lambda$. Définissons:

$$S : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

par:

$$S = (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A).$$

Comme S est un opérateur fermé, avec le théorème du graphe fermé, on voit que $S \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{E}$ nous avons:

$$\begin{aligned} & SR(\lambda; A)x = (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A)R(\lambda; A)x = \\ = \ & (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\lambda; A)R(\mu; A)x = (\lambda - \mu)R(\mu; A)x \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} & R(\lambda; A)Sx = R(\lambda; A)(\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A)x = \\ = \ & (\lambda - \mu)R(\lambda; A)(\lambda I - A)R(\mu; A)x = (\lambda - \mu)R(\mu; A)x \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent $SR(\lambda; A) = R(\lambda; A)S$.

De même, pour $x \in \mathcal{E}$ on a:

$$\begin{aligned} & S\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]x = \\ = \ & (\lambda - \mu)(\lambda I - A)R(\mu; A)\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]x = \\ = \ & \left[(\lambda I - A)R(\mu; A) - (\lambda - \mu)R(\mu; A)\right]x = \\ = \ & (\lambda I - A - \lambda I + \mu I)R(\mu; A)x = \\ = \ & (\mu I - A)R(\mu; A)x = x \quad . \end{aligned}$$

De façon analogue, pour tout $x \in \mathcal{E}$ on peut montrer que:

$$\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]Sx = x \quad .$$

Par conséquent:

$$\frac{1}{\lambda - \mu} \in \rho(R(\lambda; A)) \quad ,$$

d'où:

$$\left\{\frac{1}{\lambda - \mu}\middle| \mu \in \rho(A)\right\} \subset \rho(R(\lambda; A)) \quad .$$

Il s'ensuit que:

$$\sigma(R(\lambda; A)) \subset \left\{\frac{1}{\lambda - \zeta}\middle| \zeta \in \sigma(A)\right\} \quad .$$

Réciproquement, soit $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $\mu \in \mathbf{C}$, $\mu \neq \lambda$, tel que $\frac{1}{\lambda-\mu} \in \rho(R(\lambda; A))$. Alors il existe $R\left(\frac{1}{\lambda-\mu}; R(\lambda; A)\right) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$ nous avons:

$$R(\lambda; A)R\left(\frac{1}{\lambda - \mu}; R(\lambda; A)\right)x = R(\lambda; A)\left[\frac{1}{\lambda - \mu}I - R(\lambda; A)\right]^{-1}x =$$

$$= \left[R(\lambda;A)^{-1}\right]^{-1}\left[\frac{1}{\lambda-\mu}I - R(\lambda;A)\right]^{-1} x =$$
$$= \left\{\left[\frac{1}{\lambda-\mu}I - R(\lambda;A)\right] R(\lambda;A)^{-1}\right\}^{-1} x =$$
$$= \left[\frac{1}{\lambda-\mu}R(\lambda;A)^{-1} - I\right]^{-1} x = \left\{R(\lambda;A)^{-1}\left[\frac{1}{\lambda-\mu}I - R(\lambda;A)\right]\right\}^{-1} x =$$
$$= \left[\frac{1}{\lambda-\mu}I - R(\lambda;A)\right]^{-1} R(\lambda;A)x = R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)R(\lambda;A)x \quad .$$

Posons:

$$Q = R(\lambda;A)R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right).$$

Pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$(\mu I - A)Qx = (\mu I - \lambda I + \lambda I - A)R(\lambda;A)R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)x =$$
$$= [(\lambda I - A)R(\lambda;A) - (\lambda-\mu)R(\lambda;A)]\, R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)x =$$
$$= [I - (\lambda-\mu)R(\lambda;A)]\, R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)x =$$
$$= (\lambda-\mu)\left[\frac{1}{\lambda-\mu}I - R(\lambda;A)\right] R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)x = (\lambda-\mu)x \quad ,$$

d'où il résulte que:

$$\frac{1}{\lambda-\mu}(\mu I - A)Qx = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

De même, nous obtenons:

$$Q(\mu I - A)x = R(\lambda;A)R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)(\mu I - A)x =$$
$$= R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)R(\lambda;A)(\mu I - \lambda I + \lambda I - A)x =$$
$$= R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)[R(\lambda;A)(\lambda I - A) - R(\lambda;A)(\lambda-\mu)]\,x =$$
$$= R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)[I - (\lambda-\mu)R(\lambda;A)]\,x =$$
$$= (\lambda-\mu)R\left(\frac{1}{\lambda-\mu};R(\lambda;A)\right)\left[\frac{1}{\lambda-\mu}I - R(\lambda;A)\right]x = (\lambda-\mu)x \quad ,$$

d'où:

$$\frac{1}{\lambda-\mu}Q(\mu I - A)x = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Par conséquent $\mu \in \rho(A)$. Il s'ensuit que:

$$\rho(R(\lambda; A)) \subset \left\{ \frac{1}{\lambda - \mu} \middle| \mu \in \rho(A) \right\} \quad ,$$

ou bien:

$$\left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \middle| \zeta \in \sigma(A) \right\} \subset \sigma(R(\lambda; A)) \quad , \quad (\forall)\lambda \in \mathbf{C} \text{ avec } Re\lambda > \omega.$$

Finalement, nous voyons que:

$$\sigma(R(\lambda; A)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \zeta} \middle| \zeta \in \sigma(A) \right\} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Lambda_\omega.$$

Si $0 \in \rho(R(\lambda; A))$, alors il existe $(0I - R(\lambda; A))^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, d'où $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ ce qui est absurde. Par conséquent $0 \in \sigma(R(\lambda; A))$.$\blacksquare$

2.7 Notes

Les notions et les résultats de ce chapitre se trouvent dans les monographies concernant les C_0-semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés. Le théorème 2.1.7 se trouve dans [**Hi'48**, pag.184], mais une preuve élégante utilisant le théorème de Krein-Šmulian se trouve dans [**Da'80**, pag. 15]. De même, dans [**Pa'83-1**, pag. 43] on peut trouver une caractérisation du générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe pour la topologie faible.

Pour le théorème de l'unicité de l'engendrement nous avons utilisé [**Pa'83-1**, pag. 6] et le théorème 2.2.9 se trouve dans [**Da'80**, pag. 11].

Le résultat le plus important de ce chapitre est le théorème de Hille-Yosida. Il a été montré pour la première fois indépendamment par Hille dans [**Hi'48**] et par Yosida dans [**Yo'48**] pour les C_0-semi-groupes de contractions. Quelques années plus tard, Feller dans [**Fe'53**], Miyadera dans [**Mi'52**] et Phillips dans [**Ph'52**] donnent une preuve pour le cas général d'un C_0-semi-groupe. Nous avons utilisé les idées du livre de Pazy [**Pa'83-1**, pag. 8] pour obtenir une preuve dans le cas le plus général, en utilisant l'approximation généralisée de Yosida que nous avons introduit dans la définition 2.3.8.

Pour obtenir le représentation de Bromwich d'un C_0-semi-groupe, nous avons utilisé aussi les idées de Pazy de [**Pa'83-1**, pag. 29]. Une variante du lemme 2.4.1 se trouve dans [**Le'00-2**].

Pour le théorème 2.5.1 on peut consulter [**Pa'83-1**, pag. 30] ou bien [**Ah'91**, pag. 76]. Le téorème 2.5.2 a été montré par Gomilko dans [**Go'99**].

Pour les propriétés spectrales des C_0-semi-groupes on peut consulter [**Pa'83-1**, pag. 44] où on peut trouver aussi des autres résultats sur cette problème. Finalement, pour le théorème 2.6.7 on pourra consulter [**Da'80**, pag. 39].

Chapitre 3

C_0-semigroupes avec propriétés spéciales

3.1 C_0-semi-groupes différentiables

Par la suite, nous étudierons les propriétés des C_0-semi-groupes pour lesquels l'application $]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$ est différentiable, quel que soit $x \in \mathcal{E}$.

Définition 3.1.1 *On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe différentiable (et notons $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$) si l'application:*

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est différentiable, quel que soit $x \in \mathcal{E}$.

Théorème 3.1.2 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A son générateur infinitésimal. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
i) $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$;
ii) $\mathcal{I}m\, T(t) \subset \mathcal{D}(A)$, $(\forall)t > 0$.

Preuve $i) \Longrightarrow ii)$ Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t, h > 0$. Puisque l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)x \in \mathcal{E}$$

est différentiable, la limite du rapport

$$\frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} \quad ,$$

lorsque $h \searrow 0$, existe et est égale par définition avec $AT(t)x$. Par conséquent, $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$.

ii) $\Longrightarrow$ *i)* Considérons $x \in \mathcal{E}$ et $t, h > 0$. Comme $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$\frac{d^+T(t)x}{dt} = \lim_{h \searrow 0} \frac{T(t+h)x - T(t)x}{h} = AT(t)x \quad .$$

D'autre part, pour $h \in]0, t[$ et $\delta \in]0, t-h[$ on a:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} - AT(t)x \right\| = \\
= \quad &\left\| \frac{T(t-\delta)T(\delta)x - T(t-h-\delta)T(\delta)x}{h} - AT(\delta)T(t-\delta)x \right\| = \\
= \quad &\left\| \frac{1}{h} \left[\int_{t-h-\delta}^{t-\delta} \frac{d}{d\tau} T(\tau)T(\delta)x \, d\tau - \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} AT(\delta)T(t-\delta)x \, d\tau \right] \right\| = \\
= \quad &\left\| \frac{1}{h} \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} \left[AT(\delta)T(\tau) - AT(\delta)T(t-\delta) \right] x \, d\tau \right\| \leq \\
\leq \quad &\frac{1}{h} \| AT(\delta) \| \int_{t-h-\delta}^{t-\delta} \| T(\tau) - T(t-\delta) \| \, d\tau \|x\| = \\
= \quad &\frac{1}{h} \| AT(\delta) \| \, h \, \| T(c) - T(t-\delta) \| \, \|x\| = \\
= \quad &\| AT(\delta) \| \, \| T(c) - T(t-\delta) \| \, \|x\| \quad ,
\end{aligned}$$

où $c \in [t-h-\delta, t-\delta]$. Par conséquent:

$$\frac{d^-T(t)x}{dt} = \lim_{h \searrow 0} \frac{T(t-h)x - T(t)x}{-h} = AT(t)x \quad .$$

Donc $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0-semi-groupe différentiable.■

Proposition 3.1.3 *Soit* $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$ *. Alors l'application:*

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t_1, t_2 \in]0, \infty)$ tel que $t_1 < t_2$. Compte tenu du théorème 3.1.2, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\| T(t_1)x - T(t_2)x \| \quad &= \quad \left\| \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{ds} T(s)x \, ds \right\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} AT(t_1)T(s-t_1)x \, ds \right\| \leq \\
&\leq \quad \| AT(t_1) \| \int_{t_1}^{t_2} M e^{(s-t_1)\omega} \|x\| \, ds \quad .
\end{aligned}$$

Par suite, nous avons:

$$\|T(t_1) - T(t_2)\| \leq \|AT(t_1)\| \, M \int_{t_1}^{t_2} e^{(s-t_1)\omega} \, ds \quad ,$$

d'où résulte la continuité uniforme de l'application considérée dans l'énoncé.■

Théorème 3.1.4 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors:*

i) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ *et tout* $x \in \mathcal{E}$, *on a* $T(t)x \in \mathcal{D}(A^n)$ *et:*

$$A^n T(t)x = \left[AT\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall) t > 0;$$

ii) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ *l'application:*

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) : \mathcal{E} \to \mathcal{D}(A^n)$$

est n *fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et:*

$$T(t)^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} T(t) = A^n T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \quad , \quad (\forall) t > 0;$$

iii) pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ *l'application:*

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)^{(n)} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve Prouvons les affirmations de l'énoncé par récurrence.

i) Avec le théorème 3.1.2, on voit que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on a $T(t)x \in \mathcal{D}(A)$ et:

$$AT(t)x = \left[AT\left(\frac{t}{1}\right)\right]^1 x \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Supposons que pour tout $x \in \mathcal{E}$ on ait $T(t)x \in \mathcal{D}(A^k)$ et:

$$A^k T(t)x = \left[AT\left(\frac{t}{k}\right)\right]^k x \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Soient $x \in \mathcal{E}$ et $\delta \in]0, t[$. On voit que $T(t-\delta)T(\delta)x \in \mathcal{D}(A)$ et:

$$AT(t)x = AT(t-\delta)T(\delta)x = T(t-\delta)AT(\delta)x \in \mathcal{D}(A^k) \quad .$$

Par conséquent $T(t)x \in \mathcal{D}(A^{k+1})$, $(\forall) t > 0$. De plus:

$$\begin{aligned} A^{k+1}T(t)x &= A\left[A^k T(t-\delta)T(\delta)\right]x = A\left[T(t-\delta)A^k T(\delta)\right]x = \\ &= AT(t-\delta)\left[AT\left(\frac{\delta}{k}\right)\right]^k x \quad . \end{aligned}$$

Si $\delta = \frac{kt}{k+1}$, il vient:

$$A^{k+1}T(t)x = \left[AT\left(\frac{t}{k+1}\right)\right]^{k+1} x \quad .$$

Finalement, nous obtenons (i).
ii) Pour $n = 1$, compte tenu du théorème 3.1.2 et de la proposition 3.1.3, il résulte que l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) : \mathcal{E} \to \mathcal{D}(A)$$

est différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et:

$$T(t)' = AT(t) \quad , \quad (\forall)t > 0.$$

Comme A est un opérateur fermé et $T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il résulte que $AT(t)$ est un opérateur fermé défini sur $\mathcal{E}$. Avec le théorème du graphe fermé ([**DS'67**, Theorem II.2.4, pag. 57]), on voit que $AT(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $(\forall)t > 0$. Supposons que l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) : \mathcal{E} \to \mathcal{D}(A^k)$$

est k fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et:

$$T(t)^{(k)} = A^k T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \quad , \quad (\forall)t > 0.$$

De plus, avec la preuve précédente, on voit que $T(t)x \in \mathcal{D}\left(A^{k+1}\right)$, pour tout $t > 0$. Soient $x \in \mathcal{E}$, $\|x\| \leq 1$ et $t > 0$. Si $h > 0$ et $\delta \in]0, t[$, on a:

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{T(t+h)^{(k)}x - T(t)^{(k)}x}{h} - A^{k+1}T(t)x \right\| = \\
= &\left\| \frac{A^kT(\delta)T(t+h-\delta)x - A^kT(\delta)T(t-\delta)x}{h} - A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x \right\| = \\
= &\left\| A^kT(\delta)\frac{1}{h}\left[T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\right]x - A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x \right\| = \\
= &\left\| A^kT(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-\delta}^{t+h-\delta} \frac{d}{d\tau}T(\tau)x\, d\tau - A^{k+1}T(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-\delta}^{t+h-\delta} T(t-\delta)x\, d\tau \right\| = \\
= &\left\| A^kT(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-\delta}^{t+h-\delta} AT(\tau)x\, d\tau - A^{k+1}T(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-\delta}^{t+h-\delta} T(t-\delta)x\, d\tau \right\| = \\
= &\left\| \frac{1}{h}A^{k+1}T(\delta)\int\limits_{t-\delta}^{t+h-\delta} \left[T(\tau) - T(t-\delta)\right]x\, d\tau \right\| \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\left\|A^{k+1}T(\delta)\right\|}{h}\int\limits_{t-\delta}^{t+h-\delta}\|T(\tau)-T(t-\delta)\|\,\|x\|\,d\tau = \\
&= \left\|A^{k+1}T(\delta)\right\|\|T(c)-T(t-\delta)\|\,\|x\| \quad ,
\end{aligned}$$

où $c\in[t-\delta,t+h-\delta]$. Il s'ensuit que:

$$\left\|\frac{T(t+h)^{(k)}-T(t)^{(k)}}{h}-A^{k+1}T(t)\right\| \leq \left\|A^{k+1}T(\delta)\right\|\|T(c)-T(t-\delta)\| \quad ,$$

où $c\in[t-\delta,t+h-\delta]$. Par conséquent:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(t+h)^{(k)}-T(t)^{(k)}}{h}=A^{k+1}T(t) \quad , \quad (\forall)t>0.$$

Si $h>0$ tel que $t-h>0$ et $\delta\in]0,t-h[$, alors nous avons:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{T(t-h)^{(k)}x-T(t)^{(k)}x}{-h}-A^{k+1}T(t)x\right\| = \\
&= \left\|\frac{A^kT(\delta)T(t-\delta)x-A^kT(\delta)T(t-h-\delta)x}{h}-A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x\right\| = \\
&= \left\|A^kT(\delta)\frac{1}{h}\left[T(t-\delta)-T(t-h-\delta)\right]x-A^{k+1}T(\delta)T(t-\delta)x\right\| = \\
&= \left\|A^kT(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-h-\delta}^{t-\delta}\frac{d}{d\tau}T(\tau)x\,d\tau-A^{k+1}T(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-h-\delta}^{t-\delta}T(t-\delta)x\,d\tau\right\| = \\
&= \left\|A^kT(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-h-\delta}^{t-\delta}AT(\tau)x\,d\tau-A^{k+1}T(\delta)\frac{1}{h}\int\limits_{t-h-\delta}^{t-\delta}T(t-\delta)x\,d\tau\right\| = \\
&= \left\|\frac{1}{h}A^{k+1}T(\delta)\int\limits_{t-h-\delta}^{t-\delta}\left[T(\tau)-T(t-\delta)\right]x\,d\tau\right\| \leq \\
&\leq \frac{\left\|A^{k+1}T(\delta)\right\|}{h}\int\limits_{t-h-\delta}^{t-\delta}\|T(\tau)-T(t-\delta)\|\,\|x\|\,d\tau = \\
&= \left\|A^{k+1}T(\delta)\right\|\,\|T(c)-T(t-\delta)\|\,\|x\| \quad ,
\end{aligned}$$

où $c\in[t-h-\delta,t-\delta]$. Il vient:

$$\left\|\frac{T(t-h)^{(k)}-T(t)^{(k)}}{-h}-A^{k+1}T(t)\right\| \leq \left\|A^{k+1}T(\delta)\right\|\|T(c)-T(t-\delta)\| \quad ,$$

où $c\in[t-h-\delta,t-\delta]$. Par conséquent:

$$\lim_{h\searrow 0}\frac{T(t-h)^{(k)}-T(t)^{(k)}}{-h}=A^{k+1}T(t) \quad , \quad (\forall)t>0.$$

Il s'ensuit que $T(t)^{(k)}$ est différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et:

$$\left(T(t)^{(k)}\right)' = T(t)^{(k+1)} = A^{k+1}T(t) \quad , \quad (\forall)t > 0.$$

Comme A est un opérateur fermé et $A^kT(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, il résulte que $A\left(A^kT(t)\right)$ est un opérateur fermé défini sur $\mathcal{E}$. Avec le théorème du graphe fermé ([**DS'67**, Theorem II.2.4, pag. 57]), on voit que $T(t)^{(k+1)} = A^{k+1}T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $(\forall)t > 0$. Finalement, on a obtenu (ii).

iii) Soient $x \in \mathcal{E}$ avec $\|x\| \leq 1$ et $t > 0$. Pour $h > 0$ et $\delta \in]0, t[$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left\|T(t+h)'x - T(t)'x\right\| &= \|AT(t+h)x - AT(t)x\| \leq \\ \leq \ & \|AT(\delta)\| \, \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\| \, \|x\| \quad , \end{aligned}$$

d'où il résulte:

$$\left\|T(t+h)' - T(t)'\right\| \leq \|AT(\delta)\| \, \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\| \quad .$$

De façon analogue, pour $h > 0$ et $\delta \in]0, t-h[$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left\|T(t-h)'x - T(t)'x\right\| &= \|AT(t-h)x - AT(t)x\| \leq \\ \leq \ & \|AT(\delta)\| \, \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\| \, \|x\| \quad , \end{aligned}$$

d'où:

$$\left\|T(t-h)' - T(t)'\right\| \leq \|AT(\delta)\| \, \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\| \quad .$$

Il est clair que l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)' \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme. Supposons que l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)^{(k)} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme. Si $h > 0$ et $\delta \in]0, t[$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} \left\|T(t+h)^{(k+1)}x - T(t)^{(k+1)}x\right\| &= \left\|A^{k+1}T(t+h)x - A^{k+1}T(t)x\right\| \leq \\ \leq \ & \left\|A^{k+1}T(\delta)\right\| \, \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\| \, \|x\| \quad , \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que:

$$\left\|T(t+h)^{(k+1)} - T(t)^{(k+1)}\right\| \leq \left\|A^{k+1}T(\delta)\right\| \, \|T(t+h-\delta) - T(t-\delta)\| \quad .$$

D'autre part, pour $h > 0$ et $\delta \in]0, t-h[$ nous obtenons:

$$\begin{aligned} & \left\| T(t-h)^{(k+1)}x - T(t)^{(k+1)}x \right\| = \left\| A^{k+1}T(t-h)x - A^{k+1}T(t)x \right\| \leq \\ \leq \ & \left\| A^{k+1}T(\delta) \right\| \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\| \, \|x\| \end{aligned}$$

et on voit que:

$$\left\| T(t-h)^{(k+1)} - T(t)^{(k+1)} \right\| \leq \left\| A^{k+1}T(\delta) \right\| \|T(t-h-\delta) - T(t-\delta)\| \quad .$$

Donc l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t)^{(k+1)} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme. La propriété (iii) en découle immédiatement.■

Remarque 3.1.5 Si $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$, alors l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est de classe $\mathcal{C}^{\infty}_{]0,\infty)}$.

Remarque 3.1.6 Si $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ on a:

$$T(t)^{(n)} = A^n T(t) = \left[AT\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Nous finissons cette section avec le théorème spectral pour les C_0-semi-groupes différentiables. Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $t > 0$, nous avons défini l'opérateur linéaire borné:

$$B_\lambda(t) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds$$

et nous avons étudié ses propriétés avec le lemme 2.6.1. Si le C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est différentiable, on peut montrer le résultat suivant.

Lemme 3.1.7 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SGD}(M, \omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors:*

i) pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $t > 0$, l'opérateur $B_\lambda(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est indéfiniment dérivable et:

$$B_\lambda(t)^{(n)} = \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right) \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*;$$

ii) pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ et tout $t > 0$ on a:

$$B_\lambda(t)^{(n)} T(t)^{(n)} = T(t)^{(n)} B_\lambda(t)^{(n)} \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve Montrons les affirmations de l'énoncé par récurrence.
i) Soient $x \in \mathcal{E}$, $\lambda \in \mathbf{C}$ et $t > 0$. Alors:

$$B_\lambda(t)' x = \lambda \left(B_\lambda(t) x + \frac{T(t)x}{\lambda} \right) \quad .$$

Supposons que:

$$B_\lambda(t)^{(k)} x = \lambda^k \left(B_\lambda(t) x + \sum_{i=0}^{k} \frac{T(t)^{(i)} x}{\lambda^{i+1}} \right) \quad .$$

Alors:

$$\begin{aligned} B_\lambda(t)^{(k+1)} x &= \left(B_\lambda(t)^{(k)} x \right)' = \lambda^k \left(\lambda B_\lambda(t) x + T(t) x + \sum_{i=0}^{k} \frac{T(t)^{(i+1)} x}{\lambda^{i+1}} \right) = \\ &= \lambda^{k+1} \left(B_\lambda(t) x + \sum_{i=0}^{k+1} \frac{T(t)^{(i)} x}{\lambda^{i+1}} \right) \end{aligned}$$

et nous obtenons (i).
ii) Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ et $t > 0$. Compte tenu du théorème 3.1.4, pour $x \in \mathcal{E}$, on voit que $T(t)x \in \mathcal{D}(A^n)$ et:

$$\begin{aligned} A^n T(t) x = A^n T\left(\frac{nt}{n}\right) x &= A^n T \left(\underbrace{\frac{t}{n} + \frac{t}{n} + \cdots + \frac{t}{n}}_{\text{n fois}} \right) x = \\ &= A^n \underbrace{T\left(\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) \cdots T\left(\frac{t}{n}\right)}_{\text{n fois}} x = \left[A T\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x = \\ &= \left[T\left(\frac{t}{n}\right) A \right]^n x = T\left(\frac{nt}{n}\right) A^n = T(t) A^n x \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*, \end{aligned}$$

parce que le semi-groupe commute avec son générateur infinitésimal. De même, avec le lemme 2.6.1 il résulte que:

$$B_\lambda(t) T(t) = T(t) B_\lambda(t) \quad .$$

Alors pour $x \in \mathcal{E}$, nous avons:

$$\begin{aligned}
B_\lambda(t)^{(n)}T(t)x = \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}}\right) T(t)x = \\
&= \lambda^n \left(B_\lambda(t)T(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{A^iT(t)T(t)}{\lambda^{i+1}}\right) x = \\
&= \lambda^n \left(T(t)B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{T(t)A^iT(t)}{\lambda_{i+1}}\right) x = \\
&= T(t)\lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}}\right) x = T(t)B_\lambda(t)^{(n)}x \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)B_\lambda(t)x \quad ,$$

d'où il résulte:

$$B_\lambda(t)Ax = AB_\lambda(t)x \quad .$$

Supposons que pour $x \in \mathcal{D}(A^k)$ nous avons:

$$B_\lambda(t)A^kx = A^kB_\lambda(t)x \quad .$$

Si $x \in \mathcal{D}(A^{k+1})$, il vient:

$$B_\lambda(t)A^{k+1}x = B_\lambda(t)A^k(Ax) = A^kB_\lambda(t)Ax = A^kAB_\lambda(t)x = A^{k+1}B_\lambda(t)x.$$

Il s'ensuit donc que:

$$B_\lambda(t)A^nx = A^nB_\lambda(t)x \quad ,$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(A^n)$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$. De même, si $x \in \mathcal{D}(A^n)$, on a:

$$\begin{aligned}
B_\lambda(t)^{(n)}A^nx = \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}}\right) A^nx = \\
&= \lambda^n \left(B_\lambda(t)A^n + \sum_{i=0}^{n} \frac{A^iT(t)A^n}{\lambda^{i+1}}\right) x = \\
&= \lambda^n \left(A^nB_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{A^nA^iT(t)}{\lambda^{i+1}}\right) x = \\
&= A^n\lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}}\right) x = A^nB_\lambda(t)x \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.
\end{aligned}$$

Finalement, pour $x \in \mathcal{E}$ nous obtenons:

$$\begin{aligned}
B_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)}x &= B_\lambda(t)^{(n)}A^nT(t)x = A^nB_\lambda(t)^{(n)}T(t)x = \\
&= A^nT(t)B_\lambda(t)^{(n)}x = T(t)^{(n)}B_\lambda(t)^{(n)}x \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.\blacksquare
\end{aligned}$$

Théorème 3.1.8 (spectral mapping) *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SGD}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors pour tout* $n \in \mathbf{N}^*$ *on a:*

$$\left(e^{t\sigma(A)}\right)^{(n)} = \left\{ \lambda^n e^{\lambda t} \middle| \lambda \in \sigma(A) \right\} \subseteq \sigma\left(T(t)^{(n)}\right) \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

Preuve Pour $\lambda \in \mathbf{C}$ et $t > 0$, nous considérons l'opérateur:

$$B_\lambda(t) : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} T(s)x \, ds \quad .$$

Avec le lemme 3.1.7, on déduit que l'opérateur $B_\lambda(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ est indéfiniment dérivable et:

$$B_\lambda(t)^{(n)} = \lambda^n \left(B_\lambda(t) + \sum_{i=0}^{n} \frac{T(t)^{(i)}}{\lambda^{i+1}} \right) \quad , \quad (\forall) n \in \mathbf{N}^*.$$

Compte tenu du lemme 2.6.1, il résulte que:

$$(\lambda I - A) B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}$$

et que:

$$B_\lambda(t)(\lambda I - A)x = e^{\lambda t}x - T(t)x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ il s'ensuit que:

$$(\lambda I - A) B_\lambda(t)^{(n)}x = \lambda^n e^{\lambda t}x - T(t)^{(n)}x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}$$

et:

$$B_\lambda(t)^{(n)}(\lambda I - A)x = \lambda^n e^{\lambda t}x - T(t)^{(n)}x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A).$$

Si $\lambda \in \mathbf{C}$ est tel que $\lambda^n e^{\lambda t} \in \rho\left(T(t)^{(n)}\right)$, alors on peut considérer:

$$Q = \left(\lambda^n e^{\lambda t} I - T(t)^{(n)}\right)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \quad ,$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Par conséquent:

$$(\lambda I - A) B_\lambda(t)^{(n)} Q x = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}$$

et:

$$Q B_\lambda(t)^{(n)} (\lambda I - A)x = x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A),$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Mais, avec le lemme 3.1.7, il résulte:

$$B_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)} = T(t)^{(n)}B_\lambda(t)^{(n)} \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Donc:

$$\lambda^n e^{\lambda T} B_\lambda(t)^{(n)} - B_\lambda(t)^{(n)}T(t)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t} B_\lambda(t)^{(n)} - T(t)^{(n)}B_\lambda(t)^{(n)}$$

et:

$$B_\lambda(t)^{(n)}\left(\lambda^n e^{\lambda t} I - T(t)^{(n)}\right) = \left(\lambda^n e^{\lambda t} I - T(t)^{(n)}\right)B_\lambda(t)^{(n)} \quad ,$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Par suite:

$$B_\lambda(t)^{(n)}Q = QB_\lambda(t)^{(n)} \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*$$

et nous voyons que:

$$(\lambda I - A)B_\lambda(t)^{(n)}Qx = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}$$

et:

$$B_\lambda(t)^{(n)}Q(\lambda I - A)x = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A) \quad ,$$

d'où on obtient que $\lambda \in \rho(A)$. Nous en déduisons que $\lambda \in \sigma(A)$ implique $\lambda^n e^{\lambda t} \in \sigma\left(T(t)^{(n)}\right)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$. Par conséquent:

$$\left\{ \lambda^n e^{\lambda t} \middle| \lambda \in \sigma(A) \right\} \subset \sigma\left(T(t)^{(n)}\right) \quad ,$$

ou bien:

$$\left\{ \left(e^{\lambda t}\right)^{(n)} \middle| \lambda \in \sigma(A) \right\} \subset \sigma\left(T(t)^{(n)}\right)$$

et finalement:

$$\left(e^{t\sigma(A)}\right)^{(n)} \subset \sigma\left(T(t)^{(n)}\right) \quad ,$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t > 0$.■

3.2 C_0-semi-groupes analytiques

Par la suite nous étudions la possibilité d'étendre l'intervalle $]0,\infty)$ à une région du plan complexe, sans abandonner les propriétés de C_0-semi-groupe. Nous désignerons par Δ l'ensemble:

$$\{z \in \mathbf{C} | Re\, z > 0 \ \ et\ \varphi_1 < \arg z < \varphi_2\ ,\ \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}$$

Définition 3.2.1 *On appelle C_0-semi-groupe analytique une famille $\{T(z)\}_{z\in\Delta} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ vérifiant les propriétés suivantes:*
i) $T(0) = I$;
ii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, $(\forall) z_1, z_2 \in \Delta$;
iii) $\lim_{z\to 0} T(z)x = x$, $(\forall) x \in \mathcal{E}$, $z \in \Delta$;
iv) l'application:

$$\Delta \ni z \longmapsto T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est analytique dans le secteur Δ.

Comme la multiplication par $e^{\omega t}$ n'a aucun effet sur la possibilité ou l'impossibilité d'extension à un semi-groupe analytique, il est suffit de considérer seulement les C_0-semi-groupes uniformément bornés. Le théorème suivant donne une caractérisation pour les C_0-semi-groupes analytiques uniformément bornés.

Théorème 3.2.2 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,0)$ et A son générateur infinitésimal tel que $0 \in \rho(A)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes:*
i) il existe $\delta > 0$ tel que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ peut être étendu à un semi-groupe analytique dans le secteur:

$$\Delta_\delta = \{z \in \mathbf{C} | Re\, z > 0 \text{ et } |\arg z| < \delta\} \quad , \quad \delta > 0$$

et $\{T(z)\}_{z\in\Delta_{\delta'}}$ est uniformément borné dans tout sous secteur fermé $\Delta_{\delta'} \subset \Delta_\delta$, où $\delta' \in]0,\delta[$;
ii) il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\gamma > 0$ et tout $\eta \neq 0$ on ait:

$$\|R(\gamma + i\eta; A)\| \leq \frac{C}{|\eta|} \quad ;$$

iii) il existe $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $K > 1$ tel que:

$$\rho(A) \supset \Sigma_\delta = \left\{\lambda \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}$$

et:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{K}{|\lambda|} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Sigma_\delta - \{0\};$$

iv) l'application:

$$]0, \infty) \ni t \longmapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est différentiable et il existe une constante $L > 0$ *tel que:*

$$\|AT(t)\| \leq \frac{L}{t} \quad , \quad (\forall)t > 0.$$

Preuve $i) \Longrightarrow ii)$ Soit $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Si $\delta' \in]0, \delta[$, il existe $C' > 0$ tel que:

$$\|T(z)\| \leq C'$$

pour tout $z \in \Delta_{\delta'}$. Comme l'application:

$$\Delta_\delta \ni z \longmapsto T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est analytique dans le sous secteur $\Delta_{\delta'}$, avec le théorème de Cauchy ([**DS'67**, pag. 225]), on voit que

$$\int_\Gamma T(z)\, dz = 0 \quad ,$$

quel que soit le contour de Jordan lisse et fermé $\Gamma \subset \Delta_{\delta'}$. Par conséquent, dans l'intégrale

$$R(\gamma + i\eta; A)x = \int_0^\infty e^{-(\gamma+i\eta)t} T(t)x\, dt \quad , \quad \gamma > 0,$$

on peut changer le chemin d'intégration par:

$$\Gamma_\theta = \{r(\cos\theta + i\sin\theta) |\, 0 < r < \infty, |\theta| \leq \delta'\} \quad .$$

Si $\eta > 0$, alors pour le chemin

$$\Gamma_{-\delta'} = \{r(\cos\delta' - i\sin\delta') |\, 0 < r < \infty\} \quad ,$$

nous obtenons:

$$\|R(\gamma + i\eta; A)x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-(\gamma+i\eta)t} T(t)x\, dt \right\| =$$

$$= \left\| \int_{\Gamma_{-\delta'}} e^{-(\gamma+i\eta)r(\cos\delta' - i\sin\delta')} T(r(\cos\delta' - i\sin\delta'))x\, d(r(\cos\delta' - i\sin\delta')) \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left| e^{-(\gamma+i\eta)r(\cos\delta' - i\sin\delta')} \right| \|T(r(\cos\delta' - i\sin\delta')\| \, \|x\| |\cos\delta' - i\sin\delta'|\, dr \leq$$

$$\leq C'\|x\| \int_0^\infty e^{-r(\gamma\cos\delta' + \eta\sin\delta')}\, dr = \frac{C'\|x\|}{\gamma\cos\delta' + \eta\sin\delta'} \leq \frac{C'}{\eta\sin\delta'}\|x\| \quad .$$

Si nous notons:

$$C = \frac{C'}{\sin\delta'} \quad ,$$

alors on obtient:

$$\|R(\gamma + i\eta; A)\| \leq \frac{C}{\eta} \quad .$$

Soit maintenant $\eta < 0$. Alors pour le chemin

$$\Gamma_{\delta'} = \{r(\cos\delta' + i\sin\delta') |\, 0 < r < \infty\} \quad ,$$

nous avons:

$$\|R(\gamma + i\eta; A)x\| = \left\| \int_0^\infty e^{-(\gamma+i\eta)t} T(t)x\, dt \right\| =$$

$$= \left\| \int_{\Gamma_{\delta'}} e^{-(\gamma+i\eta)r(\cos\delta'+i\sin\delta')} T(r(\cos\delta' + i\sin\delta'))x\, d(r(\cos\delta' + i\sin\delta')) \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left| e^{-(\gamma+i\eta)r(\cos\delta'+i\sin\delta')} \right| \|T(r(\cos\delta' + i\sin\delta')\| \, \|x\| |\cos\delta' + i\sin\delta'|\, dr \leq$$

$$\leq C'\|x\| \int_0^\infty e^{-r(\gamma\cos\delta' - \eta\sin\delta')}\, dr = \frac{C'\|x\|}{\gamma\cos\delta' - \eta\sin\delta'} \leq \frac{C'}{-\eta\sin\delta'}\|x\| = \frac{C}{-\eta}\|x\| \quad .$$

Par conséquent:

$$\|R(\gamma + i\eta; A)\| \leq \frac{C}{-\eta} \quad .$$

Finalement on voit que:

$$\|R(\gamma + i\eta; A)\| \leq \frac{C}{|\eta|} \quad .$$

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, 0)$, avec le théorème de Hille-Yosida on voit que:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{Re\lambda}$$

pour tout $\lambda \in \Lambda_0$. Compte tenu du (ii), il existe $C > 0$ tel que:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{C}{|Im\lambda|}$$

pour tout $\lambda \in \Lambda_0$ avec $Im\lambda \neq 0$. Compte tenu des inégalités:

$$Re\lambda \|R(\lambda; A)\| \leq M$$

et:

$$|Im\lambda| \|R(\lambda; A)\| \leq C \quad ,$$

nous obtenons:

$$Re^2\lambda \|R(\lambda; A)\|^2 \leq M^2$$

et:

$$Im^2\lambda \|R(\lambda; A)\|^2 \leq C^2 \quad ,$$

d'où il résulte que:

$$\left(Re^2\lambda + Im^2\lambda\right) \|R(\lambda; A)\|^2 \leq M^2 + C^2 \quad .$$

Par conséquent, il existe une constante $K_1 = \sqrt{M^2 + C^2} > 1$ tel que:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{K_1}{|\lambda|} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Lambda_0.$$

Considérons $\lambda \in \mathbf{C}$ avec $Re\lambda \leq 0$. Soit $\gamma > 0$ suffisamment petit et $\eta \neq 0$. Comme l'application $R(\,.\,; A)$ est analytique sur $\rho(A)$, pour tout $\lambda = Re\lambda + i\eta \in \rho(A)$ avec $Re\lambda \leq 0$, nous obtenons:

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Re\lambda - \gamma)^n}{n!} R(\gamma + i\eta; A)^{(n)} \quad .$$

Avec la proposition 1.1.16 (iii), on voit que:

$$R(\gamma + i\eta; A)^{(n)} = (-1)^n n! R(\gamma + i\eta; A)^{n+1} \quad .$$

Alors il vient:

$$R(\lambda; A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (Re\lambda - \gamma)^n R(\gamma + i\eta; A)^{n+1}$$

et cette série est uniformément convergente pour:

$$\|R(\gamma + i\eta; A)\| \, |Re\lambda - \gamma| \leq \alpha < 1 \quad .$$

Compte tenu de la propriété (ii), elle est convergente pour la topologie de la norme si $\lambda = Re\lambda + i\eta \in \rho(A)$ est tel que sa partie réelle vérifie $Re\lambda \leq 0$ et

$$|Re\lambda - \gamma| \leq \frac{\alpha|\eta|}{C} < \frac{|\eta|}{C} \quad .$$

C'est-à-dire qu'il existe un voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon$, $\varepsilon = \frac{\alpha|\eta|}{C}$, de $\gamma + i\eta \in \Lambda_0$ contenu dans $\rho(A)$ lorsque $\gamma > 0$ est suffisamment petit. Dans ce voisinage $\mathcal{V}_\varepsilon$, il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $Re\lambda \leq 0$ et $\lambda \in \rho(A)$. Si nous définissons $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que:

$$\tan\delta = \frac{|Re\lambda|}{|Im\lambda|} = \frac{|Re\lambda|}{|\eta|} = \frac{\alpha}{C} \quad , \quad \alpha \in]0, 1[,$$

où:

$$\delta = \arctan \frac{\alpha}{C} \quad , \quad \alpha \in]0,1[,$$

alors on voit que:

$$\left\{ \zeta \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\arg \zeta| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \subset \rho(A) \quad .$$

Nous désignerons par Σ_δ l'ensemble $\left\{ \lambda \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \cup \{0\}$, où $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Si $\lambda \in \Sigma_\delta - \{0\}$ et $Re\lambda \leq 0$, alors nous avons:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| R(\gamma + i\eta; A)^{n+1} \right\| |Re\lambda - \gamma|^n \leq$$
$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{n+1}}{|\eta|^{n+1}} \frac{\alpha^n |\eta|^n}{C^n} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{C}{|Im\lambda|} \quad .$$

Comme:

$$\frac{|Re\lambda|}{|Im\lambda|} < \frac{1}{C} \quad ,$$

il vient:

$$\frac{|Re\lambda|^2}{|Im\lambda|^2} < \frac{1}{C^2} \quad ,$$

d'où:

$$\frac{|Re\lambda|^2}{|Im^2\lambda|^2} + 1 < \frac{1}{C^2} + 1 \quad .$$

Par conséquent

$$\frac{|Re\lambda|^2 + |Im\lambda|^2}{|Im\lambda|^2} < \frac{1 + C^2}{C^2} \quad ,$$

ou

$$\frac{|\lambda|^2}{|Im\lambda|^2} < \frac{1 + C^2}{C^2} \quad ,$$

Il s'ensuit donc que:

$$\frac{1}{|Im\lambda|} < \frac{\sqrt{1 + C^2}}{C|\lambda|} \quad .$$

Par suite:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{\sqrt{1 + C^2}}{(1-\alpha)|\lambda|} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Sigma_\delta - \{0\}$$

et si nous notons

$$K_2 = \frac{\sqrt{1 + C^2}}{1 - \alpha} > 1 \quad ,$$

alors il vient:

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{K_2}{|\lambda|} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Sigma_\delta - \{0\}.$$

Finalement, on obtient qu'il existe $K > 1$ tel que:

$$\|R(\lambda; A)\| \le \frac{K}{|\lambda|} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Sigma_\delta - \{0\}.$$

$iii) \Longrightarrow iv)$ Supposons qu'il existe $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $K > 1$ tel que:

$$\Sigma_\delta = \left\{\lambda \in \mathbf{C} \,\middle|\, |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta\right\} \cup \{0\}$$

et

$$\|R(\lambda; A)\| \le \frac{K}{|\lambda|} \quad , \quad (\forall)\lambda \in \Sigma_\delta - \{0\}.$$

Compte tenu du théorème 2.5.1, on voit que l'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ pour lequel il existe $M > 1$ tel que

$$\|T(t)\| \le M \quad , \quad (\forall)t \ge 0.$$

De plus, pour $\nu \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta\right[$ on considère le chemin

$$\Gamma_\nu = \Gamma_\nu^{(1)} \cup \Gamma_\nu^{(2)} \quad ,$$

où

$$\Gamma_\nu^{(1)} = \{r(\cos\nu - i\sin\nu) |\, 0 < r < \infty\}$$

et

$$\Gamma_\nu^{(2)} = \{r(\cos\nu + i\sin\nu) |\, 0 < r < \infty\} \quad ,$$

tel que

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} e^{zt} R(z; A)\, dz \quad , \quad (\forall)t \ge 0,$$

l'intégrale étant uniformément convergente par rapport à $t > 0$.
Soit

$$\varphi : [0, \infty) \times \Sigma_\delta \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E}) \quad ,$$

$$\varphi(t, z) = e^{zt} R(z; A) \quad .$$

Il est clair que l'application φ est différentiable par rapport à $t > 0$ et:

$$\frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial t} = z e^{zt} R(z; A) \quad .$$

De plus:

$$\left\|\frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial t}\right\| = \left\|z e^{zt} R(z; A)\right\| \le K \left|e^{zt}\right| \quad , \quad (\forall)t > 0.$$

Avec le théorème de dérivation de Lebesgue, on voit que l'application

$$]0,\infty) \ni t \mapsto T(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}) \quad ,$$

$$T(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} e^{zt} R(z;A)\,dz \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

est différentiable et on a:

$$T(t)' = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu} z e^{zt} R(z;A)\,dz \quad , \quad (\forall) t \geq 0.$$

Comme $\nu \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+\delta\right[$, il vient $\cos\nu < 0$ et compte tenu que:

$$\|T(t)'\| = \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu^{(1)}} z e^{zt} R(z;A)\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\nu^{(2)}} z e^{zt} R(z;A)\,dz \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r e^{rt\cos\nu} \|R(z;A)\|\,dr + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty r e^{rt\cos\nu} \|R(z;A)\|\,dr \leq$$

$$\leq \frac{K}{\pi}\int_0^\infty e^{-rt(-\cos\nu)}\,dr = \frac{K}{\pi}\left(\frac{1}{-t\cos\nu}\right) \quad , \quad (\forall) t > 0,$$

on déduit qu'il existe $L = \frac{M}{\pi(-\cos\nu)} > 0$ tel que:

$$\|AT(t)\| = \|T(t)'\| \leq \frac{L}{t} \quad , \quad (\forall) t > 0.$$

iv) $\Longrightarrow$ *i)* Soit $t_0 > 0$. Avec la formule de Taylor et compte tenu de la remarque 3.1.6, on a:

$$\begin{aligned} T(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} T^{(k)}(t_0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-u)^{n-1} T^{(n)}(u)\,du = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} A^k T(t_0) + \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-u)^{n-1} A^n T(u)\,du \quad , \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Compte tenu du (iv) et de la remarque 3.1.6, on voit que:

$$\left\| \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-u)^{n-1} A^n T(u)\,du \right\| \leq \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-u)^{n-1} \left\| \left[AT\left(\left(\frac{u}{n}\right)\right]^n \right\|\,du \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t} (t-u)^{n-1} \left(\frac{Ln}{u}\right)^n du \leq \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{Ln}{t_0}\right)^n \int_{t_0}^{t} (t-u)^{n-1}\,du =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{Ln}{t_0}\right)^n \int_0^{t-t_0} s^{n-1}\,du = \frac{1}{n!}\left(\frac{Ln}{t_0}\right)^n (t-t_0)^n \quad .$$

Avec la formule de Stirling

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n+\frac{u_n}{12n}} \quad , \quad u_n \in]0,1[,$$

on obtient

$$n! e^n \geq n^n \quad .$$

Par conséquent:

$$\left\| \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{n-1} A^n T(u)\, du \right\| \leq \frac{1}{n!} \frac{(t-t_0)^n}{t_0^n} L^n n! e^n = \left(Le \frac{t-t_0}{t_0} \right)^n \quad ,$$

pour $t \geq t_0 > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$ suffisamment grand.
Il en résulte que la série de Taylor est convergente vers $T(t)$ si $t - t_0 < \frac{t_0}{Le}$ et on a:

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} A^n T(t_0) \quad .$$

Il s'ensuit donc que pour $z \in \mathbf{C}$ vérifiant

$$Re\, z > 0 \text{ et } |z - t_0| < \frac{t_0}{Le} \quad ,$$

on peut définir une fonction analytique

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t_0)^n}{n!} A^n T(t_0) \quad .$$

La série de la partie droite de cette égalité est uniformément convergente par rapport à $z \in \mathbf{C}$ vérifiant les conditions $Re\, z > 0$ et

$$|z - t_0| < \alpha \frac{t_0}{Le} \quad ,$$

où $\alpha \in]0,1[$.
Soit $z \in \mathbf{C}$ tel que $Re\, z = t_0 >$. On voit que:

$$|Im\, z| = |z - t_0| < \frac{Re\, z}{Le} \quad ,$$

d'où:

$$\frac{|Im\, z|}{|Re\, z|} < \frac{1}{Le}$$

ou encore

$$|\arg z| \leq \arctan\left(\frac{1}{Le}\right) \quad .$$

En prenant

$$\delta = \arctan\left(\frac{1}{Le}\right) \quad ,$$

nous obtenons que l'application

$$\Delta_\delta \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est analytique dans le secteur

$$\Delta_\delta = \{z \in \mathbf{C} |\ Re\, z > 0\ et\ |\arg z| < \delta\} \quad .$$

De plus, si nous considérons $z \in \mathbf{C}$ avec les propriétés $Re\, z > 0$ et $|z - t_0| \leq \alpha \frac{t_0}{Le}$, $\alpha \in]0,1[$, alors nous déduisons que:

$$\begin{aligned} \|T(z)\| &\leq \|T(t_0)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-t_0|^n}{n!} \|A^n T(t_0)\| \leq \\ &\leq \|T(t_0)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\frac{t_0}{Le}\right)^n \left(\frac{Ln}{t_0}\right)^n \leq \\ &\leq M + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = M + \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad . \end{aligned}$$

Par conséquent, si nous notons

$$\delta^{'} = \arctan\left(\alpha \frac{1}{Le}\right) \quad , \quad \alpha \in]0,1[,$$

nous voyons que l'application

$$\Delta_\delta \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est uniformément bornée dans le sous secteur

$$\Delta_{\delta'} = \{z \in \mathbf{C} |\ Re\, z > 0\ et\ |\arg z| \leq \delta^{'}\} \subset \Delta_\delta \quad .$$

Il est évident que $T(0) = I$ parce que $\{T(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M,0)$. De plus, pour tout $t > 0$ et tout $z \in \Delta_\delta$, il résulte que:

$$\begin{aligned} T(t)T(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-t_0)^n}{n!} A^n T(t_0 + t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(z+t)-(t_0+t)]^n}{n!} A^n T(t_0+t) = T(t+z) \quad . \end{aligned}$$

Alors, pour tous $z_1, z_2 \in \Delta_\delta$, nous obtenons:

$$T(z_1)T(z_2) = T(z_1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_2-t_0)^n}{n!}A^nT(t_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_2-t_0)^n}{n!}A^nT(z_1)T(t_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_2-t_0)^n}{n!}A^nT(z_1+t_0) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(z_2+z_1)-(z_1+t_0)]^n}{n!}A^nT(z_1+t_0) = T(z_1+z_2) \quad .$$

Soit

$$\mathcal{E}_0 = \bigcup_{0<t<\infty} T(t)\mathcal{E} \quad .$$

Nous prouvons que cet ensemble est dense dans $\mathcal{E}$. Soient $x \in \mathcal{E}$ et $t_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$, tel que $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Alors pour $x_n = T(t_n)x \in \mathcal{E}_0$, $n \in \mathbf{N}$, nous obtenons:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(t_n)x = x \quad .$$

Par conséquent, $\overline{\mathcal{E}_0} = \mathcal{E}$.

De plus, nous avons vu que $\{T(z)\}_{z\in\Delta_{\delta'}}$ est uniformément borné dans tout sous secteur fermé $\Delta_{\delta'}$. De même, pour $x \in \mathcal{E}$ on obtient $T(t)x \in \mathcal{E}_0$ et:

$$\lim_{z\to 0} T(z)T(t)x = \lim_{z\to 0} T(z+t) = T(t)x \quad .$$

Compte tenu du théorème de Banach-Steinhaus ([**DS'67**, Theorem II.1.11, pag. 52]), il en résulte que

$$\lim_{z\to 0} T(z)x = x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},\ z \in \Delta_\delta.$$

Finalement, on voit que $\{T(z)\}_{z\in\Delta_\delta}$ est un C_0-semi-groupe analytique qui étend le semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,0)$.■

3.3 C_0-semi-groupes de contractions

Dans la suite nous présentons quelques problèmes concernant la classe du C_0-semi-groupes $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ vérifiant la propriété $\|T(t)\| \leq 1$, pour tout $t \geq 0$.

Définition 3.3.1 *On dit que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe de contractions sur l'espace de Banch $\mathcal{E}$ si $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1,0)$.*

Lemme 3.3.2 *Soit* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$. *Alors, l'application:*

$$||| \,.\, ||| : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{R}_+$$

$$|||x||| = \sup_{t\geq 0} e^{-\omega t}\|T(t)x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

est une norme sur $\mathcal{E}$ *équivalente avec la norme initiale* $\| \,.\, \|$.

Preuve Soit $x \in \mathcal{E}$. Pour tout $t \geq 0$, on a:

$$e^{-\omega t}\|T(t)x\| \leq e^{-\omega t}\|T(t)\|\|x\| \leq M\|x\| \quad .$$

En passant à la borne supérieure par rapport à t, on voit que:

$$|||x||| \leq M\|x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

D'autre part, nous avons:

$$|||x||| = \sup_{t\geq 0} e^{-\omega t}\|T(t)x\| \geq e^{-\omega 0}\|T(0)x\| = \|x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte que:

$$\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Par conséquent les normes $||| \,.\, |||$ et $\| \,.\, \|$ sont équivalentes.■

Théorème 3.3.3 *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$, A *son générateur infinitésimal et:*

$$S(t) = e^{-\omega t}T(t) \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Alors:
i) $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1,0)$;
ii) le C_0*-semi-groupe* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *a pour générateur infinitésimal l'opérateur* $B = A - \omega I$.

Preuve i) Il est clair que la famille $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-semi-groupe. De plus, pour tout $t \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned} |||S(t)x||| &= \sup_{s\geq 0} e^{-\omega s}\|T(s)e^{-\omega t}T(t)x\| = \\ &= \sup_{\tau\geq t} e^{-\omega \tau}\|T(\tau)x\| \leq \sup_{\tau\geq 0} e^{-\omega \tau}\|T(\tau)x\| = |||x||| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

d'où on obtient:

$$|||S(t)x||| \leq |||x||| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E} \text{ et } t \geq 0.$$

Il s'ensuit que:

$$\|S(t)\| \leq 1 \quad , \quad (\forall)t \geq 0$$

et, par conséquent, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1,0)$.
ii) Elle est analogue à celle du théorème 2.1.11.■

Pour les C_0-semi-groupes de contractions, on peut formuler la version suivante du théorème de Hille-Yosida.

Théorème 3.3.4 *Un opérateur linéaire:*

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1,0)$ *si et seulement si:*
i) A *est un opérateur fermé et* $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$*;*
ii) $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, \mathrm{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Lambda_0$*, on a:*

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{1}{(Re\lambda)^n} \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Preuve *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* Comme $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1,0)$, nous avons:

$$\|T(t)\| \leq 1 \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Par suite, on peut prendre $M = 1$ et $\omega = 0$. Avec le théorème de Hille-Yosida, il résulte que:
(i) A est un opérateur fermé et $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$;
(ii) $\Lambda_0 = \{\lambda \in \mathbf{C} \,|\, Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Lambda_0$, on a:

$$\|R(\lambda; A)^n\| \leq \frac{1}{(\mathrm{Re}\lambda)^n} \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

ii) $\Longrightarrow$ *i)* Soit

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$$

un opérateur linéaire vérifiant les propriétés (i) et (ii) de l'énoncé. Avec le théorème de Hille-Yosida, il en résulte que A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ pour lequel il existe $M = 1$ et $\omega = 0$ tel que:

$$\|T(t)\| \leq 1 \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Donc A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.■

Une autre caractérisation très intéressante des C_0-semi-groupes de contractions est donnée par le fameux théorème de Lumer-Phillips, dans lequel interviennent les opérateurs m-dissipatifs.

Définition 3.3.5 *On appelle opérateur m-dissipatif un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ vérifiant les propriétés suivantes:*
i) A est opérateur dissipatif;
ii) il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\mathcal{I}m\ (\alpha_0 I - A) = \mathcal{E}$.

Théorème 3.3.6 (Lumer - Phillips) *Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur linéaire tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$.*
L'opérateur A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1,0)$ si et seulement si A est un opérateur m-dissipatif.

Preuve $\Longrightarrow$ Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1,0)$. Si $x \in \mathcal{D}(A)$ et $x^* \in \mathcal{J}(x)$, alors pour tout $t \geq 0$ on voit que:

$$\begin{aligned} & Re\langle T(t)x - x, x^*\rangle = Re\langle T(t)x, x^*\rangle - Re\langle x, x^*\rangle \leq \\ \leq\ & |\langle T(t)x, x^*\rangle| - Re\langle x, x^*\rangle \leq \|T(t)x\|\|x^*\|_* - \|x\|^2 \leq \\ \leq\ & \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0 \quad , \end{aligned}$$

d'où:

$$\frac{1}{t} Re\langle T(t)x - x, x^*\rangle \leq 0 \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

En passant à limite pour $t \searrow 0$, il vient:

$$Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $x^* \in \mathcal{J}(x)$. Il s'ensuit donc que A est un opérateur dissipatif.
D'autre part, avec le théorème 3.3.4 , on voit que $]0,\infty) \subset \rho(A)$. Donc $\alpha I - A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$, $(\forall)\alpha \in]0,\infty)$. Par suite, $\mathcal{I}m\ (\alpha I - A) = \mathcal{E}$ pour tout $\alpha > 0$ et finalement on voit que A est un opérateur m-dissipatif.
ii) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ un opérateur m-dissipatif tel que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$. Alors, il existe $\alpha_0 \in]0,\infty)$ tel que $\mathcal{I}m\ (\alpha_0 I - A) = \mathcal{E}$. En appliquant la proposition 1.2.3,

on voit que $\mathcal{I}m\ (\alpha I - A) = \mathcal{E}$, pour tout $\alpha \in]0, \infty)$. Il s'ensuit que $]0, \infty) \subset \rho(A)$. Comme A est un opérateur dissipatif, compte tenu de la proposition 1.2.2, il vient:

$$\|(\alpha I - A)x\| \geq \alpha\|x\| \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où:

$$\|R(\alpha; A)\| \leq \frac{1}{\alpha}$$

pour tout $\alpha \in]0, \infty)$. Avec le théorème 3.3.4, on voit que A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(1, 0)$.■

Proposition 3.3.7 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ tel que $\|A\| \leq 1$. Alors $\left\{e^{t(A-I)}\right\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu de contractions.*

Preuve Il est évident que $\left\{e^{t(A-I)}\right\}_{t\geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu. De plus:

$$\left\|e^{t(A-I)}\right\| \leq \left\|e^{tA}\right\| \left\|e^{-t}\right\| \leq e^{t\|A\|}e^{-t} \leq 1 \quad , \quad (\forall)t \geq 0.■$$

3.4 Notes

Pour les propriétés des C_0-semi-groupes différentiables nous avons consulté [**Pa'83-1**, pag. 51], [**Ah'91**, pag. 73] et [**Da'80**, pag. 28]. Le théorème 3.1.8 se trouve dans [**Le'00-1**].

Les propriétés des C_0-semi-groupes analytiques uniformément bornés se trouvent dans [**Pa'83-1**, pag. 60], [**Ah'91**, pag. 81] ou [**Da'80**, pag.59]. Une introduction très intéressante des C_0-semi-groupes analytiques, par la construction d'un calcul fonctionnel adéquat, est donné dans [**CHADP'87**, pag. 121].

Le théorème 3.3.6 a été montré par Lummer et Phillips dans [**LP'61**].

Chapitre 4

La formule de Lie - Trotter

4.1 Le cas des semi-groupes uniformément continus

Dans cette section nous présentons la formule du produit de Lie-Trotter pour les semi-groupes uniformément continus.

Théorème 4.1.1 *Soient A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ et $\left(\{A_n(t)\}_{t\geq 0}\right)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ tel que:*

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n(t)\| = 0 \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Alors:

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} \left[I + \frac{t}{n}\left(A + A_n(t)\right)\right]^n \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.

Preuve Soient $0 \leq a < b$. Si nous notons:

$$V_n(t) = I + \frac{t}{n}\left(A + A_n(t)\right) \quad ,$$

alors, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a:

$$\begin{aligned} \left\|V_n^k(t)\right\| &= \left\|\left[I + \frac{t}{n}\left(A + A_n(t)\right)\right]^k\right\| \leq \\ &\leq \left[1 + \frac{t}{n}\left(\|A\| + \|A_n(t)\|\right)\right]^k \leq \left[1 + \frac{t}{n}\left(\|A\| + \|A_n(t)\|\right)\right]^n = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i \left(\|A\| + \|A_n(t)\|\right)^i}{n^i} \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i \left(\|A\| + \|A_n(t)\|\right)^i}{i!} \leq \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i \left(\|A\| + \|A_n(t)\|\right)^i}{i!} = e^{t(\|A\|+\|A_n(t)\|)} \leq M \quad ,
\end{aligned}$$

cette dernière quantité etant uniformément bornée par rapport à $t \in [a,b]$. De même, pour:

$$U_n(t) = e^{\frac{t}{n}A} \quad , \quad (\forall) t \geq 0,$$

nous obtenons:

$$U_n^n(t) = e^{tA} = T(t) \quad , \quad (\forall) t \geq 0$$

et pour tout $0 \leq k \leq n$, nous avons:

$$\left\| U_n^k(t) \right\| \leq e^{\frac{kt}{n}\|A\|} \leq e^{\frac{nt}{n}\|A\|} \leq e^{t\|A\|} \leq N \quad ,$$

uniformément par rapport à $t \in [a,b]$. Il vient:

$$\begin{aligned}
& V_n^n(t) - U_n^n(t) = V_n^n(t)U_n^0(t) - V_n^{n-1}(t)U_n^1(t) + \\
+ \; & V_n^{n-1}(t)U_n^1(t) - V_n^{n-2}(t)U_n^2(t) + \\
+ \; & V_n^{n-2}(t)U_n^2(t) - \cdots - V_n^0(t)U_n^n(t) = \\
= \; & \sum_{i=0}^{n-1} \left[V_n^{n-i}(t)U_n^i(t) - V_n^{n-i-1}(t)U_n^{i+1}(t) \right] = \\
= \; & \sum_{i=0}^{n-1} V_n^{n-i-1}(t) \left[V_n(t) - U_n(t) \right] U_n^i(t) \quad .
\end{aligned}$$

Comme:

$$\begin{aligned}
& V_n(t) - U_n(t) = I + \frac{t}{n}A + \frac{t}{n}A_n(t) - e^{\frac{t}{n}A} = \\
= \; & I + \frac{t}{n}A + \frac{t}{n}A_n(t) - I - \frac{t}{n}A - \frac{1}{2!}\frac{t^2}{n^2}A^2 - \cdots \quad ,
\end{aligned}$$

il résulte que:

$$\|V_n(t) - U_n(t)\| \leq \frac{t}{n}\|A_n(t)\| + \frac{1}{2!}\frac{t^2}{n^2}\|A\|^2 + \cdots \quad .$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
& \|V_n^n(t) - U_n^n(t)\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} M \left(\frac{t}{n}\|A_n(t)\| + \frac{1}{2!}\frac{t^2}{n^2}\|A\|^2 + \cdots \right) N = \\
= \; & MN \left(t\|A_n(t)\| + \frac{1}{2!}\frac{t^2}{n}\|A\|^2 + \cdots \right) \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty,
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$, ce qui achève la preuve.■

Théorème 4.1.2 (la formule exponentielle) *Soit A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Alors:*

$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}A\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right]^n \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.

Preuve La première égalité résulte du théorème 4.1.1 pour $A_n(t) = 0$, quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $t \geq 0$.
Soient $0 \leq a < b$. On a:

$$\left\|\frac{t}{n}A\right\| < 1$$

pour n suffisamment grand et $t \in [a,b]$. Avec le lemme 1.1.2, il vient:

$$I - \frac{t}{n}A \in \mathcal{GL}(\mathcal{E})$$

et:

$$\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i A^i}{n^i} = I + \frac{t}{n}\left(A + A_n(t)\right) \quad ,$$

où:

$$A_n(t) = \frac{t}{n}A^2 + \frac{t^2}{n^2}A^3 + \cdots$$

et:

$$\lim_{n\to\infty}\|A_n(t)\| = 0 \quad ,$$

uniformément par rapport à $t \in [a,b]$. Avec le théorème 4.1.1, on voit que:

$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left(I + \frac{t}{n}(A + A_n(t))\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[I - \frac{t}{n}A\right]^{-n} \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.
La troisième égalité en résulte compte tenu que:

$$\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} = \left[\frac{n}{t}\left(\frac{n}{t}I - A\right)^{-1}\right]^n = \left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right]^n \quad .\blacksquare$$

Théorème 4.1.3 (la formule de Lie-Trotter) *Soit A_1 le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T_1(t)\}_{t\geq 0}$ et A_2 le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\{T_2(t)\}_{t\geq 0}$, alors l'opérateur:*

$$A : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \quad ,$$

$$Ax = A_1 x + A_2 x$$

est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *uniformément continu, tel que:*

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} \left[T_1\left(\frac{t}{n}\right) T_2\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \quad ,$$

uniformément par rapport à t *sur les intervalles compacts de* $[0, \infty)$.

Preuve Nous avons successivement:

$$\begin{aligned}
& T_1\left(\frac{t}{n}\right) T_2\left(\frac{t}{n}\right) = e^{\frac{t}{n}A_1} e^{\frac{t}{n}A_2} = \\
= & \left[I + \frac{t}{n}A_1 + \frac{1}{2!}\frac{t^2}{n^2}A_1^2 + \frac{1}{3!}\frac{t^3}{n^3}A_1^3 + \cdots\right]\left[I + \frac{t}{n}A_2 + \frac{1}{2!}\frac{t^2}{n^2}A_2^2 + \frac{1}{3!}\frac{t^3}{n^3}A_2^3 + \cdots\right] = \\
= & I + \frac{t}{n}(A_1 + A_2) + \frac{t^2}{n^2}\left(\frac{1}{2!}A_1^2 + A_1A_2 + \frac{1}{2!}A_2^2\right) + \cdots = \\
= & I + \frac{t}{n}\left[(A_1 + A_2) + \frac{t}{n}\left(\frac{1}{2!}A_1^2 + A_1A_2 + \frac{1}{2!}A_2^2\right) + \cdots\right] = \\
= & I + \frac{t}{n}\left[A + A_n(t)\right] \quad ,
\end{aligned}$$

où l'opérateur:

$$A_n(t) = \frac{t}{n}\left(\frac{1}{2!}A_1^2 + A_1A_2 + \frac{1}{2!}A_2^2\right) + \frac{t^2}{n^2}\left(\frac{1}{3!}A_1^3 + \frac{1}{2!}A_1^2A_2 + \frac{1}{2!}A_1A_2^2 + \frac{1}{3!}A_2^3\right) + \cdots$$

a la propriété:

$$\begin{aligned}
\|A_n(t)\| \leq & \frac{t}{n}\left\|\frac{1}{2!}A_1^2 + A_1A_2 + \frac{1}{2!}A_2^2\right\| + \\
+ & \frac{t^2}{n^2}\left\|\frac{1}{3!}A_1^3 + \frac{1}{2!}A_1^2A_2 + \frac{1}{2!}A_1A_2^2 + \frac{1}{3!}A_2^3\right\| + \cdots \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \to \infty \quad ,
\end{aligned}$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$. Avec le théorème 4.1.1, on voit que:

$$T(t) = \lim_{n\to\infty} \left[T_1\left(\frac{t}{n}\right) T_2\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$.■

Remarque 4.1.4 Si $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, alors on a:

$$e^{t(A+B)} = \lim_{n\to\infty} \left(e^{\frac{t}{n}A} e^{\frac{t}{n}B}\right)^n \quad ,$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0, \infty)$.

4.2 Propriétés de convergence des C_0-semi-groupes

Dans cette section on introduit la topologie de la résolvante sur l'ensemble $\mathcal{GI}(\mathcal{E})$ des générateurs infinitésimaux et on montre le théorème de Trotter - Kato.

Définition 4.2.1 *On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathcal{GI}(\mathcal{E})$ est convergente vers $A \in \mathcal{GI}(\mathcal{E})$ pour la topologie forte de la résolvante si pour tout $\lambda \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \rho(A_n) \cap \rho(A)$, on a:*

$$R(\lambda; A_n)x \longrightarrow R(\lambda; A)x \quad , \quad si \quad n \to \infty \ , \ (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

De même, on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathcal{GI}(\mathcal{E})$ est convergente vers $A \in \mathcal{GI}(\mathcal{E})$ pour la topologie uniforme de la résolvante si pour tout $\lambda \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} \rho(A_n) \cap \rho(A)$, on a:

$$\|R(\lambda; A_n) - R(\lambda; A)\| \longrightarrow 0 \quad , \quad si \quad n \to \infty.$$

Par la suite, nous supposerons que $\mathcal{GI}(\mathcal{E})$ est doté de la topologie forte de la résolvante.

Lemme 4.2.2 *Soient $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M, \omega)$ et A, respectivement B, leur générateurs infinitésimaux. Alors pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$ et tout $x \in \mathcal{E}$ on a l'égalité:*

$$R(\lambda; B)\,[T(t) - S(t)]\,R(\lambda; A)x = \int_0^t S(t-s)\,[R(\lambda; A) - R(\lambda; B)]\,T(s)x\,ds$$

quel que soit $t \geq 0$.

Preuve Soient $x \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \Lambda_\omega$. Alors $R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}(A)$ et $R(\lambda; B)x \in \mathcal{D}(B)$. L'application:

$$[0, t] \ni s \longrightarrow S(t-s)R(\lambda; B)T(s)R(\lambda; A)x \in \mathcal{E}$$

est différentiable et pour $s \in [0, t]$ et $x \in \mathcal{E}$ nous avons:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{ds}S(t-s)\,[R(\lambda; B)T(s)R(\lambda; A)x] = \\
= \quad & S(t-s)(-B)R(\lambda; B)T(s)R(\lambda; A)x + S(t-s)R(\lambda; B)T(s)AR(\lambda; A)x = \\
= \quad & S(t-s)(\lambda I - B - \lambda I)R(\lambda; B)T(s)R(\lambda; A)x + \\
+ \quad & S(t-s)R(\lambda; B)T(s)(-\lambda I + A + \lambda I)R(\lambda; A)x = \\
= \quad & S(t-s)T(s)R(\lambda; A)x - \lambda S(t-s)R(\lambda; B)T(s)R(\lambda; A)x -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \quad S(t-s)R(\lambda;B)T(s)x + \lambda S(t-s)R(\lambda;B)T(s)R(\lambda;A)x = \\ &= \quad S(t-s)\left[T(s)R(\lambda;A)x - R(\lambda;B)T(s)x\right] = \\ &= \quad S(t-s)\left[R(\lambda;A) - R(\lambda;B)\right]T(s)x \end{aligned}$$

puisque la résolvante $R(\lambda;A)$ commute avec $T(t)$, $(\forall)t \geq 0$. Par conséquent:

$$S(t-s)R(\lambda;B)T(s)R(\lambda;A)x|_0^t = \int_0^t S(t-s)\left[R(\lambda;A) - R(\lambda;B)\right]T(s)x\,ds \quad ,$$

ou encore:

$$\begin{aligned} &R(\lambda;B)T(t)R(\lambda;A)x - S(t)R(\lambda;B)R(\lambda;A)x = \\ = &\int_0^t S(t-s)\left[R(\lambda;A) - R(\lambda;B)\right]T(s)x\,ds \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Comme $S(t)R(\lambda;B) = R(\lambda;B)S(t)$ pour tout $t \geq 0$, on obtient finalement:

$$R(\lambda;B)\left[T(t) - S(t)\right]R(\lambda;A)x = \int_0^t S(t-s)\left[R(\lambda;A) - R(\lambda;B)\right]T(s)x\,ds$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$.$\blacksquare$

Le théorème suivant présente une très jolie correspondance entre les C_0-semi-groupes d'opérateurs linéaires bornés et leur générateurs infinitésimaux.

Théorème 4.2.3 *Soient* $\left(\{T_n(t)\}_{t\geq 0}\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathcal{SG}(M,\omega)$ *ayant pour générateurs infinitésimaux les opérateurs* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathcal{GI}(M,\omega)$ *et* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur* $A \in \mathcal{GI}(M,\omega)$.
Les affirmations suivantes sont équivalentes:
i) $A_n \longrightarrow A$, *si* $n \to \infty$, *pour la topologie forte de la résolvante;*
ii) pour tout $t_0 \in]0,\infty)$ *on a l'égalité:*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,t_0]}\|T_n(t)x - T(t)x\|\right\} = 0 \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Preuve *i)* $\Longrightarrow$ *ii)* Supposons que $A_n \longrightarrow A$, si $n \to \infty$, pour la topologie forte de la résolvante. Pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, nous avons:

$$R(\lambda;A_n)x \longrightarrow R(\lambda;A)x \quad , \quad \text{si } n \to \infty\ ,\ (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Soient $t_0 \in]0,\infty)$, $x \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \Lambda_\omega$ arbitrairement fixées. Puisque la résolvante commute avec le semi-groupe associé, il résulte que:

$$\begin{aligned} &\left[T_n(t) - T(t)\right]R(\lambda;A)x = T_n(t)\left[R(\lambda;A) - R(\lambda;A_n)\right]x + \\ + \quad &R(\lambda;A_n)\left[T_n(t) - T(t)\right]x + \left[R(\lambda;A_n) - R(\lambda;A)\right]T(t)x. \end{aligned}$$

Montrons que cette expression tend vers zero si $n \to \infty$.
Comme $\left(\{T_n(t)\}_{t\geq 0}\right)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathcal{SG}(M,\omega)$, il est clair que:

$$\|T_n(t)\| \leq Me^{\omega t_0} \quad , \quad (\forall)t \in [0,t_0].$$

Compte tennu de (i), on voit que le premier terme converge vers zero si $n \to \infty$, uniformément par rapport à $t \in [0,t_0]$.
De même, la continuité de l'application $t \mapsto T(t)x$ sur l'intervalle compact $[0,t_0]$, conduit au fait que l'ensemble $\{T(t)x \,| t \in [0,t_0]\}$ est compact, comme l'image d'un compact par une fonction continue. On en déduit facilement que le troisième terme est fortement convergent vers zero lorsque $n \to \infty$ et cette convergence est uniforme par rapport à $t \in [0,t_0]$.
Pour le deuxième terme, compte tenu du lemme 4.2.2, on a:

$$R(\lambda;A_n)\,[T(t)-T_n(t)]\,R(\lambda;A)x = \int_0^t T_n(t-s)\,[R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)]\,T(s)x\,ds,$$

pour tout $t \in [0,t_0]$. Si pour $s \in [0,t_0]$, on pose

$$f_{t,n}(s)x = T_n(t-s)\,[R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)]\,T(s)x \quad , \quad 0 \leq s \leq t \leq t_0,$$

alors on voit que:

$$\begin{aligned}
\|f_{t,n}(s)x\| &= \|T_n(t-s)\,[R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)]\,T(s)x\| \leq \\
&\leq \|T_n(t-s)\|\,\|R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)\|\,\|T(s)\|\,\|x\| \leq \\
&\leq Me^{\omega(t-s)}\left(\|R(\lambda;A)\| + \|R(\lambda;A_n)\|\right)Me^{\omega s}\|x\| \leq \\
&\leq Me^{\omega t}\left(\frac{M}{Re\,\lambda-\omega} + \frac{M}{Re\,\lambda-\omega}\right)Me^{\omega t}\|x\| = \\
&= \frac{2M^3}{Re\,\lambda-\omega}e^{2\omega t}\|x\| \quad .
\end{aligned}$$

De plus, compte tenu des inégalités:

$$\begin{aligned}
\|f_{t,n}(s)x\| &= \|T_n(t-s)\,[R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)]\,T(s)x\| \leq \\
&\leq \|T_n(t-s)\|\,\|R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)\|\,\|T(s)\|\,\|x\| \leq \\
&\leq Me^{\omega(t-s)}\,\|R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)\|\,Me^{\omega s}\|x\| \leq \\
&\leq M^2e^{\omega t}\,\|R(\lambda;A)-R(\lambda;A_n)\|\,\|x\| \quad ,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{t,n}(s)x\| = 0 \quad ,$$

quels que soient $s \in [0,t]$ et $t \in [0,t_0]$. Avec le théorème de la convergence dominée de Lebesgue ([**DS'67**, Theorem III.3.7, pag. 124]) il résulte que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \|f_{t,n}(s)x\| \, ds = \int_0^t \lim_{n\to\infty} \|f_{t,n}(s)x\| \, ds \quad ,$$

pour tout $t \in [0,t_0]$. Il s'ensuit donc que:

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda;A_n)\,[T(t)-T_n(t)]\,R(\lambda;A)x\| = 0 \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à $t \in [0,t_0]$. Si nous notons $y = R(\lambda;A)x \in \mathcal{D}(A)$, on voit que:

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\lambda;A_n)\,[T(t)-T_n(t)]\,y\| = 0 \quad , \quad (\forall)y \in \mathcal{D}(A),$$

uniformément par rapport à $t \in [0,t_0]$. Par conséquent, si $x \in \mathcal{D}(A)$, le deuxième terme tend vers zero pour $n \to \infty$, uniformément par rapport à $t \in [0,t_0]$.
Il s'ensuit que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,t_0]} \|[T_n(t)-T(t)]\,R(\lambda;A)x\| \right\} = 0 \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

d'où il résulte immédiatement:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,t_0]} \|[T_n(t)-T(t)]\,y\| \right\} = 0 \quad , \quad (\forall)y \in R(\lambda;A)\mathcal{D}(A).$$

Comme $R(\lambda;A)\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}\left(A^2\right)$, compte tenu du théorème 2.2.10 on voit que $\overline{R(\lambda;A)\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$. Nous obtenons finalement:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{t\in[0,t_0]} \|T_n(t)x - T(t)x\| \right\} = 0 \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

ii) $\Longrightarrow$ *i)* En appliquant le théorème 2.3.1, nous obtenons pour $\lambda \in \Lambda_\omega$:

$$[R(\lambda;A_n) - R(\lambda;A)]\,x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,[T_n(t)-T(t)]\,x\,dt \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

d'où il résulte:

$$\|[R(\lambda;A_n) - R(\lambda;A)]\,x\| \le \int_0^\infty e^{-Re\lambda t}\,\|[T_n(t)-T(t)]\,x\| \, dt \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Mais:

$$\|[T_n(t)-T(t)]\,x\| \le 2Me^{\omega t}\|x\|$$

quels que soient $x \in \mathcal{E}$, $t \geq 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Dans ce cas, en posant:

$$f_n(t) = e^{\lambda t}\left[T_n(t) - T(t)\right]x \quad , \quad (\forall)t \geq 0$$

on voit que:

$$\|f_n(t)\| \leq 2Me^{-(Re\lambda-\omega)t}\|x\| \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

De plus, compte tenu de l'inégalité:

$$\|f_n(t)\| \leq e^{-Re\lambda t}\left\|\left[T_n(t) - T(t)\right]x\right\| \quad ,$$

nous obtenons:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\| = 0 \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Avec le théorème de la convergence dominée de Lebesgue ([**DS'67**, Theorem III.3.7, pag. 124]), il vient:

$$\lim_{n\to\infty} \left\|\left[R(\lambda; A_n) - R(\lambda; A)\right]x\right\| = 0$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$ et tout $\lambda \in \Lambda_\omega$. Donc $A_n \longrightarrow A$, si $n \to \infty$, pour la topologie forte de la résolvante.■

Une version intéressante du théorème 4.2.3 est le théorème suivant.

Théorème 4.2.4 *Soient* $\left(\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}\right)_{\alpha>0} \subset \mathcal{SG}(M,\omega)$ *ayant pour générateurs infinitésimaux les opérateurs* $(A_\alpha)_{\alpha>0} \subset \mathcal{GI}(M,\omega)$ *et* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur* $A \in \mathcal{GI}(M,\omega)$.
Les affirmations suivantes sont équivalentes:
i) pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, *il existe* $x_\alpha \in \mathcal{D}(A_\alpha)$ *tel que:*

$$\lim_{\alpha\searrow 0} x_\alpha = x$$

et:

$$\lim_{\alpha\searrow 0} A_\alpha x_\alpha = Ax;$$

ii) pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, *on a:*

$$\lim_{\alpha\searrow 0} R(\lambda; A_\alpha)x = R(\lambda; A)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E};$$

iii) pour tout $t_0 \in]0,\infty)$, *nous avons:*

$$\lim_{\alpha\searrow 0}\left\{\sup_{t\in[0,t_0]} \|T_\alpha(t)x - T(t)x\|\right\} = 0 \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Preuve $i) \Longrightarrow ii)$ Soient $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $x \in \mathcal{D}(A)$. Alors il existe $x_\alpha \in \mathcal{D}(A_\alpha)$, $\alpha > 0$ tel que

$$\lim_{\alpha \searrow 0} x_\alpha = x$$

et:

$$\lim_{\alpha \searrow 0} A_\alpha x_\alpha = Ax \quad .$$

Nous définissons

$$y = (\lambda I - A)x \in (\lambda I - A)\mathcal{D}(A)$$

et

$$y_\alpha = (\lambda I - A_\alpha)x_\alpha \in (\lambda I - A_\alpha)\mathcal{D}(A_\alpha) \quad , \quad \alpha > 0.$$

Il résulte que $x = R(\lambda; A)y$ et $x_\alpha = R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha$. Compte tenu des égalités du (i), nous obtenons:

$$\lim_{\alpha \searrow 0} R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha = R(\lambda; A)y$$

et:

$$\lim_{\alpha \searrow 0} A_\alpha R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha = AR(\lambda; A)y \quad .$$

On voit que cette dernière égalité devient:

$$\lim_{\alpha \searrow 0}(\lambda I - \lambda I + A_\alpha)R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha = (\lambda I - \lambda I + A)R(\lambda; A)y$$

ou bien

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \searrow 0} \lambda R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha - \lim_{\alpha \searrow 0}(\lambda I - A_\alpha)R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha = \\ = \ & \lambda R(\lambda; A)y - (\lambda I - A)R(\lambda; A)y \quad . \end{aligned}$$

Il vient:

$$\lambda R(\lambda; A)y - \lim_{\alpha \searrow 0} y_\alpha = \lambda R(\lambda; A)y - y \quad ,$$

d'où:

$$\lim_{\alpha \searrow 0} y_\alpha = y \quad .$$

D'autre part, pour tout $\alpha > 0$ on a:

$$\|R(\lambda; A_\alpha)\| \leq \frac{M}{Re\lambda - \omega}$$

et pour $y \in (\lambda I - A)\mathcal{D}(A)$ on voit que:

$$R(\lambda; A_\alpha)y = R(\lambda; A_\alpha)(y - y_\alpha + y_\alpha) = R(\lambda; A_\alpha)(y - y_\alpha) + R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha \quad .$$

Par suite:

$$\begin{aligned} & \|R(\lambda; A_\alpha)y - R(\lambda; A)y\| \leq \\ \leq \quad & \|R(\lambda; A_\alpha)(y - y_\alpha)\| + \|R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha - R(\lambda; A)y\| \leq \\ \leq \quad & \frac{M}{Re\lambda - \omega}\|y - y_\alpha\| + \|R(\lambda; A_\alpha)y_\alpha - R(\lambda; A)y\| \quad , \end{aligned}$$

d'où il vient:

$$\lim_{\alpha\searrow 0} R(\lambda; A_\alpha)y = R(\lambda; A)y \quad ,$$

pour tout $y \in (\lambda I - A)\mathcal{D}(A)$. Comme $\overline{(\lambda I - A)\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$, on voit que:

$$\lim_{\alpha\searrow 0} R(\lambda; A_\alpha)x = R(\lambda; A)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

$ii) \Longrightarrow i)$ Soient $\lambda \in \Lambda_\omega$ et $x \in \mathcal{E}$ tel que:

$$\lim_{\alpha\searrow 0} R(\lambda; A_\alpha)x = R(\lambda; A)x \quad .$$

Si nous définissons:

$$y_\alpha = R(\lambda; A_\alpha)x \in \mathcal{D}(A_\alpha)$$

et:

$$y = R(\lambda; A)x \in \mathcal{D}(A) \quad ,$$

nous obtenons:

$$\lim_{\alpha\searrow 0} y_\alpha = y \quad .$$

De plus:

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha\searrow 0} A_\alpha y_\alpha = \lim_{\alpha\searrow 0} A_\alpha R(\lambda; A_\alpha)x = \lim_{\alpha\searrow 0}[\lambda R(\lambda; A_\alpha)x - x] = \\ = \quad & \lambda R(\lambda; A)x - x = AR(\lambda; A)x = Ay \quad . \end{aligned}$$

$ii) \iff iii)$ Cette équivalence s'obtient avec une preuve analogue à celle du théorème 4.2.3.■

Corollaire 4.2.5 *Soient* $\left(\{T_\alpha(t)\}_{t\geq 0}\right)_{\alpha>0} \subset \mathcal{SG}(M,\omega)$ *ayant pour générateurs infinitésimaux les opérateurs* $(A_\alpha)_{\alpha>0} \subset \mathcal{GI}(M,\omega)$ *et* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *ayant pour générateur infinitésimal l'opérateur* $A \in \mathcal{GI}(M,\omega)$. *Supposons que pour tout* $x \in \mathcal{D}(A)$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $\alpha \in]0, \delta[$ *on ait* $x \in \mathcal{D}(A_\alpha)$ *et* $\lim_{\alpha\searrow 0} A_\alpha x = Ax$. *Alors, pour tout* $t_0 \in]0, \infty)$ *nous avons:*

$$\lim_{\alpha\searrow 0}\left\{\sup_{t\in[0,t_0]} \|T_\alpha(t)x - T(t)x\|\right\} = 0 \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E}.$$

Preuve Dans le théorème 4.2.4, nous pouvons prendre $x_\alpha = x$, $(\forall)\alpha \in]0, \delta[$.■

Le théorème suivant montre que sous certaines conditions, $\mathcal{GI}(M, \omega)$ est une sous-classe fermée dans $\mathcal{GI}(\mathcal{E})$.

Théorème 4.2.6 *Soient* $(A_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \subset \mathcal{GI}(M, \omega)$ *et* $\lambda_0 \in \Lambda_\omega$ *tel que:*
i) $(R(\lambda_0; A_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ *est fortement convergente vers* $R_{\lambda_0} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$*;*
ii) $\overline{\mathcal{I}m\ R_{\lambda_0}} = \mathcal{E}$.
Alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{GI}(M, \omega)$ *tel que* $R_{\lambda_0} = R(\lambda_0; A)$.

Preuve Nous notons:

$$\mathcal{S} = \left\{\lambda \in \Lambda_\omega \middle| (R(\lambda; A_n))_{n\in\mathbf{N}^*} \textit{ est fortement convergente}\right\}.$$

Montrons que $\mathcal{S} = \Lambda_\omega$.
Prouvons que $\mathcal{S}$ est ensemble ouvert dans Λ_ω. Soit $\mu \in \mathcal{S}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'application:

$$\rho(A_n) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

est analytique et nous avons:

$$\begin{aligned} R(\lambda; A_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\mu)^k}{k!} \frac{d^k}{d\mu^k} R(\mu; A_n) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda-\mu)^k}{k!} (-1)^k k! R(\mu; A_n)^{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^k R(\mu; A_n)^{k+1} \quad . \end{aligned}$$

Comme $A_n \in \mathcal{GI}(M, \omega)$ implique:

$$\left\| R(\mu; A_n)^k \right\| \le \frac{M}{(Re\mu - \omega)^k} \quad , \quad (\forall) k \in \mathbf{N}^*,$$

on voit que:

$$\|R(\lambda; A_n)\| \le \sum_{k=0}^{\infty} |\mu-\lambda|^k \left\| R(\mu; A)^{k+1} \right\| \le \frac{M}{Re\mu - \omega} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|\mu-\lambda|}{Re\mu - \omega} \right)^k \quad .$$

La série de la partie droite de cette inégalité est convergente sur l'ensemble:

$$\mathcal{V} = \left\{\lambda \in \Lambda_\omega \,\middle|\, |\mu-\lambda|(Re\mu - \omega)^{-1} < 1\right\}.$$

Il en résulte que la série:

$$R(\lambda; A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^k R(\mu; A_n)^{k+1}$$

est uniformément convergente sur les compacts

$$\mathcal{V}_\nu = \left\{ \lambda \in \Lambda_\omega \,\middle|\, |\mu - \lambda| (Re\mu - \omega)^{-1} \leq \nu < 1 \right\} \subset \mathcal{V} \quad .$$

Comme

$$\|R(\lambda; A)\| \leq \frac{M}{Re\,\mu - \omega} \sum_{k=0}^{\infty} \nu^k \quad ,$$

on voit que la suite $(R(\lambda; A_n))_{n\in\mathbf{N}^*}$ est fortement convergente pour tout $\lambda \in \mathcal{V}_\nu$. Donc il existe un voisinage de μ contenu dans $\mathcal{S}$. Par conséquent $\mathcal{S}$ est ensemble ouvert dans Λ_ω.

Maintenant, nous allons montrer que $\mathcal{S}$ est un ensemble relativement fermé dans Λ_ω. Soient $(\lambda_m)_{m\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{S}$ et $\lambda \in \Lambda_\omega$ tel que

$$\lambda = \lim_{m\to\infty} \lambda_m \quad .$$

Pour tout $\nu \in]0, 1[$, il existe $\lambda_{m,\nu} \in \mathcal{S}$ tel que:

$$|\lambda_{m,\nu} - \lambda| \, (Re\, \lambda_{m,\nu} - \omega)^{-1} \leq \nu < 1 \quad .$$

Compte tenu de la première partie de la preuve, on voit que la série

$$R(\lambda; A_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_{m,\nu} - \lambda)^k \, R(\lambda_{m,\nu}; A_n)^{k+1}$$

est uniformément convergente et que la suite $(R(\lambda; A_n))_n \in \mathbf{N}^*$ est fortement convergente. Par conséquent, $\lambda \in \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}$ est un ensemble relativement fermé dans Λ_ω. Comme $\lambda_0 \in \mathcal{S}$, nous voyons que $\mathcal{S} = \Lambda_\omega$ par connexité.

Pour $\lambda \in \Lambda_\omega$, définissons l'opérateur $R_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ par:

$$R_\lambda x = \lim_{n\to\infty} R(\lambda; A_n) x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

Soient λ , $\mu \in \Lambda_\omega$ arbitraires. On a:

$$\begin{aligned}
(R_\lambda - R_\mu)\, x &= \lim_{n\to\infty} \left[R(\lambda; A_n) - R(\mu; A_n) \right] x = \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mu - \lambda) R(\lambda; A_n) R(\mu; A_n) x = \\
&= (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.
\end{aligned}$$

Par conséquent R_λ est une pseudo-résolvante, quel que soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Comme il existe $\lambda_0 \in \Lambda_\omega$ tel que $\overline{\mathcal{I}m\ R_{\lambda_0}} = \mathcal{E}$, compte tenu du théorème 1.1.22 (ii), on déduit que $\overline{\mathcal{I}m\ R_\lambda} = \mathcal{E}$, quel que soit $\lambda \in \Lambda_\omega$. Avec l'inégalité:

$$\|R(\lambda; A_n)^m\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^m} \quad , \quad (\forall) \lambda \in \Lambda_\omega \text{ et } m \in \mathbf{N}^*,$$

on voit que pour tout compact $K \subset \Lambda_\omega$, il existe $M_K > 0$ tel que

$$\sup_{\lambda \in K} \|R(\lambda; A_n)\| \leq M_K \quad ,$$

quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$. Avec le lemme de Montel ([**GS'99**, pag. 220]), on déduit qu'il existe une sous-suite $(R(\lambda; A_{n_k}))_{k \in \mathbf{N}^*}$ telle que

$$R_\lambda x = \lim_{k \to \infty} R(\lambda; A_{n_k})x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à λ sur les compacts de Λ_ω. Comme $R(\lambda; A_{n_k})$ est un opérateur injectif pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, avec le théorème de Hurwitz ([**GS'99**, pag. 193]) nous obtenons que R_λ est un opérateur injectif, donc $\mathcal{K}er\ R(\lambda; A_n) = \{0\}$. En appliquant le théorème 1.1.22 (iii), on voit que pour tout $\lambda \in \Lambda_\omega$, il existe un opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \longrightarrow \mathcal{E}$, $A = \lambda I - R_\lambda^{-1}$ fermé et défini sur un sous espace dense tel que $R_\lambda = R(\lambda; A)$, $(\forall)\lambda \in \Lambda_\omega$. De plus:

$$\|R(\lambda; A)^m\| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^m} \quad .$$

et le théorème de Hille - Yosida implique alors que $A \in \mathcal{GI}(M, \omega)$.■

Maintenant, nous avons toutes les conditions pour formuler un autre résultat important concernant les C_0-semi-groupes.

Théorème 4.2.7 (Trotter - Kato) *Soit* $\left(\{T_n(t)\}_{t \geq 0}\right)_{n \in \mathbf{N}^*} \subset \mathcal{SG}(M, \omega)$ *ayant pour générateurs infinitésimaux les opérateurs* $(A_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \subset \mathcal{GI}(M, \omega)$.
S'il existe $\lambda_0 \in \Lambda_\omega$ *tel que:*
i) $(R(\lambda_0; A_n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ *est fortement convergente vers* $R_{\lambda_0} \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$*;*
ii) $\overline{\mathcal{I}m\ R_{\lambda_0}} = \mathcal{E}$,
alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{GI}(M, \omega)$ *tel que* $R_\lambda = R(\lambda; A)$, $(\forall)\lambda \in \Lambda_\omega$. *De plus, si* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *est le* C_0*-semi-groupe engendré par* A*, alors pour tout* $t_0 \in]0, \infty)$ *on a:*

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \sup_{t \in [0, t_0]} \|T_n(t)x - T(t)x\| \right\} = 0 \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}.$$

Preuve Les affirmations du théorème résultent du théorème 4.2.3 et du théorème 4.2.6.■

4.3 Formule de Lie - Trotter pour les C_0-semi-groupes

Dans la suite, nous montrons le théorème de représentation générale, la formule exponentielle et la formule de Lie-Trotter pour les semi-groupes fortement continus. Nous commençons par un résultat technique.

Lemme 4.3.1 *Soient $T \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ et $M, N \geq 1$ tel que:*

$$\left\|T^k\right\| \leq MN^k \quad , \quad (\forall) k \in \mathbf{N}^*.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, nous avons:

$$\left\|e^{n(T-I)}x - T^n x\right\| \leq MN^{n-1}e^{(N-1)n}\sqrt{n^2(N-1)^2 + nN}\|Tx - x\|$$

pour tout $x \in \mathcal{E}$.

Preuve Soient $k, n \in \mathbf{N}$ tel que $k \geq n$. Alors, nous avons:

$$\begin{aligned} \left\|T^k x - T^n x\right\| &= \left\|\sum_{i=n}^{k-1}\left(T^{i+1}x - T^i x\right)\right\| \leq \\ \leq & \sum_{i=n}^{k-1}\left\|T^i\right\| \|Tx - x\| \leq \|Tx - x\| \sum_{i=n}^{k-1} MN^i \leq \\ \leq & M\|Tx - x\| \sum_{i=n}^{k-1} N^{k-1} = (k-n)MN^{k-1}\|Tx - x\| \leq \\ \leq & |k-n|MN^{n+k-1}\|Tx - x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la symétrie, il est clair que cette inégalité reste valable si nous considérons $n > k$. Par suite, on voit que:

$$\left\|T^k x - T^n x\right\| \leq |k-n|MN^{n+k-1}\|Tx - x\| \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E} \text{ et } n, k \in \mathbf{N}.$$

Si $t \geq 0$ et $n \in \mathbf{N}$, alors nous avons:

$$\begin{aligned} \left\|e^{t(T-I)}x - T^n x\right\| &= \left\|e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(T^k x - T^n x\right)\right\| \leq \\ \leq \quad e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left\|T^k x - T^n x\right\| &\leq MN^{n-1}e^{-t}\|Tx - x\| \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}|k-n| \quad . \end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}|k-n| = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{(tN)^k}{k!}}\right)\left(\sqrt{\frac{(tN)^k}{k!}}|k-n|\right) \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}}\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tN)^k}{k!}(k-n)^2} = e^{tN}\sqrt{(n-Nt)^2+Nt} \quad .$$

Il s'ensuit que:

$$\left\|e^{t(T-I)}x - T^n x\right\| \leq MN^{n-1}e^{(N-1)t}\sqrt{(n-Nt)^2+Nt}\|Tx-x\|$$

quel que soit $x \in \mathcal{E}$. Finalement, en prenant $t = n$, nous obtenons l'inégalité considérée dans l'énoncé.■

Théorème 4.3.2 (de représentation générale) *Soit* $\{F(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(\mathcal{E})$ *une famille d'opérateurs linéaires bornés avec* $F(0) = I$*. Supposons qu'il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tel que:*

$$\left\|F(t)^k\right\| \leq Me^{k\omega t} \quad , \quad (\forall)k \in \mathbf{N}^*,$$

pour tout $t \geq 0$*.*
Si A *est le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *tel que:*

$$\lim_{t\searrow 0}\frac{F(t)x-x}{t} = Ax \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A),$$

alors nous avons:

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t *sur les intervalles compacts de* $[0, \infty)$*.*

Preuve Soient $0 \leq a < b$. Pour $t \in [a, b]$, définissons:

$$A_n = \frac{n}{t}\left[F\left(\frac{t}{n}\right) - I\right] \quad , \quad (\forall)n \in \mathbf{N}^*.$$

Il est clair que $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $(\forall)n \in \mathbf{N}^*$, d'où il résulte que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, A_n est le générateur infinitésimal du semi-groupe uniformément continu $\left\{e^{tA_n}\right\}_{t\geq 0}$ et, de plus, nous avons:

$$\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{D}(A).$$

Avec le corollaire 4.2.5, nous voyons que:

$$\lim_{n\to\infty} e^{tA_n}x = T(t)x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à $t \in [a,b]$. Compte tenu du lemme 4.3.1, si $x \in \mathcal{D}(A)$, il vient:

$$\begin{aligned}
&\left\| e^{tA_n}x - \left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x\right\| = \left\| e^{n\left[F\left(\frac{t}{n}\right)-I\right]}x - \left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x\right\| \leq \\
\leq\ & Me^{\omega\frac{t}{n}(n-1)}e^{\left(e^{\omega\frac{t}{n}}-1\right)n}\sqrt{n^2\left(e^{\omega\frac{t}{n}}-1\right)^2+ne^{\omega\frac{t}{n}}}\left\|F\left(\frac{t}{n}\right)x-x\right\| = \\
=\ & Me^{\omega\frac{t}{n}(n-1)+\left(e^{\omega\frac{t}{n}}-1\right)n}\sqrt{n^2\left(e^{\omega\frac{t}{n}}-1\right)^2+ne^{\omega\frac{t}{n}}}\,\frac{t}{n}\left\|\frac{F\left(\frac{t}{n}\right)x-x}{\frac{t}{n}}\right\| = \\
=\ & Me^{\omega\frac{t}{n}(n-1)+\frac{e^{\omega\frac{t}{n}}-1}{\frac{t}{n}}t}\sqrt{t^2\left(e^{\omega\frac{t}{n}}-1\right)^2+\frac{t^2}{n}e^{\omega\frac{t}{n}}}\left\|\frac{F\left(\frac{t}{n}\right)x-x}{\frac{t}{n}}\right\| \quad ,
\end{aligned}$$

d'où:

$$\left\| e^{tA_n}x - \left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n\to\infty,$$

pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, uniformément par rapport à $t \in [a,b]$. De plus, pour tout $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$\begin{aligned}
&\left\| T(t)x - \left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x\right\| \leq \\
\leq\ & \left\|T(t)x - e^{tA_n}x\right\| + \left\| e^{tA_n}x - \left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad n\to\infty,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que:

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{D}(A),$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.
Comme $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{E}$ et $\left\|F\left(\frac{t}{n}\right)^n\right\| \leq Me^{\omega t}$, on voit que:

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.■

Théorème 4.3.3 (la formule exponentielle) *Soient* $\{T(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{SG}(M,\omega)$ *et* A *son générateur infinitésimal. Alors:*

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left(I-\frac{t}{n}A\right)^{-n}x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall)x\in\mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t *sur les intevalles compacts de* $[0,\infty)$.

Preuve Pour $A \in \mathcal{GI}(M, \omega)$ et $t \in \left]0, \frac{1}{\omega}\right[$, nous définissons:

$$F(t) = (I - tA)^{-1} = \frac{1}{t} R\left(\frac{1}{t}; A\right) \quad .$$

Compte tenu du théorème de Hille-Yosida, on voit que:

$$\left\| F(t)^k \right\| = \left\| \left[\frac{1}{t} R\left(\frac{1}{t}; A\right) \right]^k \right\| \leq \left(\frac{1}{t}\right)^k \frac{M}{\left(\frac{1}{t} - \omega\right)^k} = \frac{M}{(1 - \omega t)^k} \quad .$$

Comme:

$$\frac{1}{(1 - \omega t)^k} \leq e^{\frac{k \omega t}{1 - \omega t}} \quad ,$$

il vient:

$$\left\| F(t)^k \right\| \leq M e^{2k\omega t}$$

pour $t \in \left]0, \frac{1}{2\omega}\right]$. D'autre part, avec le lemme 2.3.6 nous obtenons:

$$\begin{aligned} \lim_{t \searrow 0} \frac{F(t)x - x}{t} &= \lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} \left[F(t) - I \right] x = \lim_{t \searrow 0} AF(t)x = \\ = & \lim_{t \searrow 0} A \left[\frac{1}{t} R\left(\frac{1}{t}; A\right) x \right] = Ax \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A). \end{aligned}$$

Compte tenu du théorème de représentation générale, on voit que:

$$\begin{aligned} T(t)x &= \lim_{n \to \infty} \left[F\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n x = \lim_{n \to \infty} \left(I - \frac{t}{n} A \right)^{-n} x = \\ = & \lim_{n \to \infty} \left[\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}; A\right) \right]^n x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{E}, \end{aligned}$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compactes de $[0, \infty)$.■

Théorème 4.3.4 (la formule de Lie-Trotter) *Soient $A_1 \in \mathcal{GI}(M_1, \omega_1)$ le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T_1(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M_1, \omega_1)$, respectivement $A_2 \in \mathcal{GI}(M_2, \omega_2)$ le générateur infinitésimal du semi-groupe $\{T_2(t)\}_{t \geq 0} \in \mathcal{SG}(M_2, \omega_2)$. Supposons qu'il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que:*

$$\left\| [T_1(t) T_2(t)]^k \right\| \leq M e^{k \omega t} \quad , \quad (\forall) k \in \mathbf{N}^*.$$

Si l'opérateur

$$A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E},$$

défini par:

$$Ax = A_1 x + A_2 x \quad , \quad (\forall) x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2),$$

est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, alors:

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[T_1\left(\frac{t}{n}\right)T_2\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.

Preuve Soit:

$$F : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{E})$$

$$F(t) = T_1(t)T_2(t) \quad , \quad (\forall)t \geq 0.$$

Il est évident que $F(0) = I$. De plus, pour $x \in \mathcal{D}(A)$, nous avons:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\searrow 0}\frac{F(t)x - x}{t} = \lim_{t\searrow 0}\frac{T_1(t)T_2(t)x - x}{t} = \\
= \ &\lim_{t\searrow 0}\frac{T_1(t)T_2(t)x - T_1(t)x}{t} + \lim_{t\searrow 0}\frac{T_1(t)x - x}{t} = \\
= \ &\lim_{t\searrow 0}T_1(t)\frac{T_2(t)x - x}{t} + A_1x = A_1x + A_2x = Ax \quad .
\end{aligned}$$

Avec le théorème de représentation générale, on voit que:

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x = \lim_{n\to\infty}\left[T_1\left(\frac{t}{n}\right)T_2\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.■

Remarque 4.3.5 Si $A \in \mathcal{GI}(M,\omega)$, compte tenu de la formule exponentielle, on peut définir:

$$e^{tA}x = \lim_{n\to\infty}\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n} x = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t};A\right)\right]^n x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$. Avec cette notation, dans les hypothèses du théorème 4.3.4, nous obtenons pour la formule de Lie-Trotter l'expression:

$$e^{tA}x = \lim_{n\to\infty}\left[e^{\frac{t}{n}A_1}e^{\frac{t}{n}A_2}\right]^n x \quad , \quad (\forall)x \in \mathcal{E},$$

uniformément par rapport à t sur les intervalles compacts de $[0,\infty)$.

4.4 Notes

Pour les résultats de la section 4.1 on peut consulter [**Ka'82**, pag. 35].

Les propriétés de convergence pour les C_0-semi-groupes ont été étudiées par Trotter dans [**Tr'58**]. Pour les théorèmes 4.2.3, 4.2.6, 4.2.7 on peut consulter [**Pa'83-1**, pag. 84] ou [**Ah'91**, pag. 131] et pour le théorème 4.2.4 nous avons utilisé [**Da'80**, pag. 80].

Le théorème 4.3.4 a été montré par Trotter dans [**Tr'59**] et a été étudié par Chernoff dans [**Ce'68**]. Les résultats que nous avons présentés se trouvent dans [**Pa'83-1**, pag. 89]. Dans [**Da'80**, pag. 90], on peut trouver ces problèmes pour les C_0-semi-groupes de contractions.

Bibliographie

[**Ah'91**] Ahmed, N.U. *Semigroup theory with application to systems and control.* Logman Scientific & Tehnical, London, 1991.

[**Ba'76**] Barbu, V. *Nonliniar semigroups and differential equations in Banach Spaces.* Editura Academiei R.S.R. Bucureşti and Noordhoff International Publishing Leyden, 1976.

[**BB'67**] Butzer, P.L., Berens,H. *Semi-Groups of Operators and Approximations.* Springer Verlag, New York Inc., 1967.

[**Ca'01**] Cassier, G. *Semigroups in finite von Neumann algebras.* Operator Theory: Adv. and Appl., 127, Birkhäuser Verlag, 2001, 145-162.

[**Ce'68**] Chernoff, P.R. *Note on product formula for operator semi-groups.* J. Funct. Anal., 2(1968), 238-242.

[**Ce'72**] Chernoff, P.R. *Perturbation of dissipative operators with relative bound one.* Proc. Amer. Math. Soc., 33(1972), 72-74.

[**Ch'74**] Chevalier, J. *Semigroupes d'opérateurs et thèorie du contrôle optimal.* Liége, 1974.

[**CHADP'87**] Clément, P.H., Heijmans, H.J.A.M., Angenent, S., van Duijn, C.J., de Patger, B. *One-parameter Semigroups.* CWI Monograph 5, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo, 1987.

[**Da'80**] Davies, E.B. *One-parameter semigroups.* Academic Press, London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980.

[**DS'67**] Dunford, N., Schwartz, J.T. *Linear Operators. Part.I.* Interscience Publishers, Inc. New York, Wiley, 1967.

[**Fe'53**] FELLER, W. *On the generation of unbounded semigroups of bounded linear operators.* Ann. of Math., 58(1953), 166-174.

[**Ga'81**] GAŞPAR, D. *Analiza funcţională.* Ed. Facla, Timişoara, 1981.

[**GS'89**] GAŞPAR, D., SUCIU, N. *Analiză matematică. Introducere în analiza complexă.* Tipografia Universităţii din Timişoara, 1989.

[**GS'95**] GAŞPAR, D., SUCIU, N. *Funcţii de variabilă complexă.* Ed. Mirton, Timişoara, 1995.

[**GS'99**] GAŞPAR, D., SUCIU, N. *Analiză complexă.* Ed. Acad. Române, Bucureşti, 1999.

[**GW'74**] GAŞPAR, D., WESTPHAL, U. *Über den Kogenerator einer Kontractionshalbgruppe.* Analele Universităţii din Timişoara, 1(1974), 43-55.

[**Go'99**] GOMILKO, A.M. *Conditions on the Generator of a Uniformly Bounded C_0-semigroup.* Funct. Anal. and Its Appl., 33(1999), 294-296.

[**Hi'48**] HILLE, E. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S., New York, 1948.

[**HP'57**] HILLE, E., PHILLIPS, R.S. *Functional Analysis and Semi-Groups.* A.M.S., Providence, Rhode Island, 1957.

[**Is'81**] ISTRĂŢESCU, V.I. *Introduction to Linear Operator Theory.* Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1981.

[**Ka'66**] KATO, T. *Perturbation theory for linear operators.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[**Ka'70**] KATO, T. *A characterization of holomorphic semigroups.* Proc. Amer. Math. Soc., 25(1970), 495-498.

[**Ka'82**] KATO, T. *A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators.* Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[**Le'00-1**] LEMLE, L.D. *Asupra teoremei aplicaţiei spectrale pentru C_0-semigrupuri diferenţiabile.* Universitaria ROPET Petroşani (2000), 33-38.

[**Le'00-2**] Lemle, L.D. *Aproximaţia Yosida a generatorului infinitezimal al unui semigrup tare continuu de operatori liniari mărginiţi.* Bul. Şt. Acad. "Henri Coandă" Braşov, 2(12) (2000), 265-274.

[**Le'00-3**] Lemle, L.D. *Transformata Laplace a unui semigrup uniform continuu de operatori liniari mărginiţi.* Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, (5)2000, 159-163.

[**Le'00-4**] Lemle, L.D. *Le théorème spectral pour les semi-groupes uniformément continus d'opérateurs linéaires bornés.* Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, (5)2000, 164-167.

[**Le'00-5**] Lemle, L.D. *Un théorèm de représentation pour C_0-semi-groupes.* Proceedings of the National Conference on Mathematical Analysis and Applications (the Dumitru Gaşpar anniversary issue). Timişoara, 2000, 163-176.

[**Le'01-1**] Lemle, L.D. *La formule du produit pour les semi-groupes uniformément continus.* Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, (5)2001, 173-176.

[**Le'01-2**] Lemle, L.D. *C_0-semi-groupes analytiques.* Analele Facultăţii de Inginerie din Hunedoara, (5)2001, 177-184.

[**LP'61**] Lumer, G., Phillips, R.S. *Dissipative operators in a Banach space.* Pacific J. Math., 11(1961), 679-698.

[**Me'88**] Megan, M. *Propriétés qualitatives des systèmes linéaires côntrolés dans les espaces de dimension infinie.* Monographies mathématiques nr.32, Université de Timişoara, 1988.

[**Mi'52**] Miyadera, I. *Generation of strongly continuous semi-groups of operators.* Tohoku Math. J., 4(1952), 109-114.

[**Na'35**] Nathan, D.S. *One parameter groups of transformations in abstract vector spaces.* Duke Math. J., (1935), 518-526.

[**Pa'83-1**] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer Verlag, New York, Berlin, 1983.

[**Pa'83-2**] Pazy, A. *Semigroups of operators in Banach spaces.* Lect. Notes in Math., 1017(1983), Springer, Berlin, 508-524.

[**Ph'52**] Phillips, R.S. *On the generation of semi-groups of linear operators.* Pacific J.Math., 2(1952), 393-415.

[**RB'98**] Reghiş, M., Babescu, Gh. *Ecuaţii diferenţiale liniare de ordinul doi în spaţii Banach.* Ed. Academiei Române, Bucureşti, 1998.

[**Tr'58**] Trotter, H.F. *Approximation of semi-groups of operators.* Pacific J. Math., 8(1958), 887-919.

[**Tr'59**] Trotter, H.F. *On the product of semi-groups of operators.* Proc. Am. Math. Soc., 10(1959),545-551.

[**Va'87**] Vasilescu, F.H. *Iniţiere în teoria operatorilor liniari.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.

[**Yo'36**] Yosida, K. *On the group embeded in the metrical complete ring.* Japan J. Math., (1936), 7-26.

[**Yo'48**] Yosida, K. *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groupes of linear operators.* J. Math. Soc. Japan, 1(1948), 15-21.

[**Yo'57**] Yosida, K. *Lectures on Semi-group Theory and its application to Cauchy problem in Partial Differential Equations.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[**Yo'67**] Yosida, K. *Functional Analysis.* Springer Verlag, New York, 1967.